تست و پاسخ ۱

تابع $f(x)=۳x^۴-x^۳$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۴})$

۲) $(-\frac{۱}{۴},۰)$

۳) $(-\infty,-\frac{۱}{۴})$

۴) $(\frac{۱}{۴},+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

بعید است که سؤال کنکور به این سادگی باشد، ولی از جمله سؤالات رایج در امتحانات مدارس است.

از تابع مشتق بگیرید، هر جا $f'(x)\geq ۰$ باشد، تابع صعودی است.

پیداکردن بازه‌های یکنوایی تابع f

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار آن تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، بازه‌های یکنوایی را مشخص می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** f' را حساب می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم.
		گام دوم: هر جا f' مثبت بود، f صعودی اکید و هر جا f' منفی بود، f نزولی اکید است.

گام اول: می‌خواهیم با استفاده از مشتق، یکنوایی تابع را بررسی کنیم، پس از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=۳x^۴-x^۳$$
$$f'(x)=۱۲x^۳-۳x^۲$$

گام دوم: تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس در هر بازه‌ای که $f'\geq ۰$ باشد، تابع صعودی است.

کافی است f' را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x)=۳x^۲(۴x-۱) \Rightarrow \text{ریشه‌ها:} \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

x		۰		$\frac{۱}{۴}$	
$f'(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

پس تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۴},+\infty)$ صعودی است.

تست و پاسخ ۲

مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^۲(x+۳)+۱$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

از تابع f مشتق بگیرید و ریشه‌های $f'(x)=۰$ را به دست آورید.

طریقهٔ پیداکردن اکسترمم‌های مطلق در بازهٔ $[a,b]$

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار آن تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، نقاط اکسترمم مطلق را پیدا می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** ریشه‌های f' را در بازهٔ $[a,b]$ حساب می‌کنیم (معادلهٔ $f'=۰$ را حل می‌کنیم).
		گام دوم: مقدار f را به ازای نقاط بحرانی (ریشه‌های f'، جاهایی که f' موجود نیست و نقاط ابتدا و انتهای بازه) حساب می‌کنیم.
		گام سوم: از بین مقادیر به‌دست‌آمده از گام دوم، هر کدام از بقیه بیشتر بود، max مطلق و هر کدام از بقیه کم‌تر بود، min مطلق می‌شود.

گام اول: ابتدا نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ را به دست می‌آوریم. از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+۱$$
$$f'(x)=۳x^۲+۶x$$
$$\text{نقاط بحرانی: } f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۶x=۰ \Rightarrow ۳x(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۲ \end{cases}$$

تنها $x=۰$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ است. از طرفی نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی هستند، پس سه نقطهٔ بحرانی $\{-۱,۰,۱\}$ داریم.

گام دوم: مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم تا مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع به دست آیند.

$$f(-۱)=۱(-۱)^۳+۳(-۱)^۲+۱=۳$$
$$f(۰)=۱$$
$$f(۱)=۱^۳+۳\times ۱^۲+۱=۵$$

پس در بازهٔ $[-۱,۱]$، ماکزیمم تابع f برابر با ۵ و مینیمم آن برابر با یک است که مجموع آن‌ها ۶ می‌شود.

تست و پاسخ ۳

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲}{x}$ در بازهٔ $[۱,۲]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه، برابر است؟

۱) $x=\frac{۳}{۲}$ ۲) $x=\sqrt{۲}$ ۳) $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $x=\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۱,۲]$ را به دست آورید و حاصل را با $f'(x)$ برابر قرار می‌دهید.

آهنگ تغییرات

۱	متوسط	آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
۲	لحظه‌ای	آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

گام اول: آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازهٔ $[۱,۲]$ به دست می‌آوریم.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\frac{\frac{۲^۲+۲}{۲}-\frac{۱^۲+۲}{۱}}{۱}=۳-۳=۰$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در هر نقطه برابر با مشتق تابع در آن نقطه است؛ بنابراین باید مشتق تابع را برابر با صفر قرار دهیم.

$$f(x)=\frac{x^۲+۲}{x}=x+\frac{۲}{x}$$

$$f'(x)=۱-\frac{۲}{x^۲}$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱-\frac{۲}{x^۲}=۰ \Rightarrow \frac{۲}{x^۲}=۱ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

تنها $x=\sqrt{۲}$ در بازهٔ $[۱,۲]$ قابل قبول است.

تست و پاسخ ۴

نقطهٔ $M(x,y)$ را بر نمودار تابع $f(x)=x^۲$ در نظر می‌گیریم. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از خطی با عرض از مبدأ ۲− که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد، برابر با d باشد، آهنگ متوسط تغییر d نسبت به تغییر x در بازهٔ $[\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۲}]$ کدام است؟

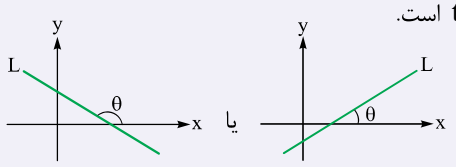
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

یک سؤال ترکیبی از مباحث مثلثات، هندسهٔ تحلیلی و مشتق است. بسیاری از سؤالات کنکورهای سال‌های اخیر، سؤالات ترکیبی هستند.

مختصات نقطهٔ M را به صورت $(x,x^۲)$ در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن از خط را برحسب x بنویسید.

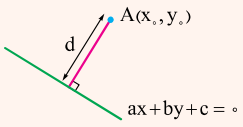
اگر خط L با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ بسازد، شیب خط برابر با $\tan\theta$ است.



شیب خط L: $m=\tan\theta$

فاصلهٔ نقطه از خط

برای به دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از یک خط، باید معادلهٔ خط را به شکل $ax+by+c=۰$ درآوریم و بعد از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:



نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ را در سمت چپ تساوی $ax+by+c=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ضریب x و y در معادلهٔ خط

گام اول: خطی که عرض از مبدأ آن $b=-۲$ است و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد را L می‌نامیم و معادلهٔ آن را می‌نویسیم. شیب این خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد؛ پس:

شیب خط: $m=\tan ۱۳۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$

معادلهٔ خط: $y=mx+b \Rightarrow y=-۱\times x-۲ \Rightarrow$ خط L: $y+x+۲=۰$

@Azmoniko1

گام دوم: نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی تابع f است؛ پس مختصات آن به فرم $M(x,x^۲)$ است.

گام سوم: فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,x^۲)$ را از خط $y+x+۲=۰$ به دست آورده و برابر با d قرار می‌دهیم:

$$d=\frac{|x^۲+x+۲|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} \Rightarrow d(x)=\frac{x^۲+x+۲}{\sqrt{۲}} \quad \overbrace{\Delta<۰ \text{ و } a>۰}^{\text{همواره }+} \Rightarrow$$

گام چهارم: آهنگ متوسط تغییر تابع d در بازهٔ $[\alpha,\beta]$ برابر است با:

$$\bar{d}=\frac{d(\beta)-d(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{(\beta^۲-\alpha^۲)+(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+۱)}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\beta+\alpha+۱)$$

پس آهنگ متوسط تغییر تابع d در بازهٔ $[\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۲}]$ برابر است با:

$$\bar{d}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}+۱)=۲$$

تست و پاسخ ۵

اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۶}{x+a+۱}$ در فاصلهٔ $(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

از تابع f مشتق بگیرید و شرط $f'(x)<۰$ را برقرار کنید.

گام اول: برای آن‌که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید مشتق آن منفی باشد.

$$f(x)=\frac{ax+۶}{x+a+۱}$$

$$f'(x)=\frac{a(x+a+۱)-(ax+۶)}{(x+a+۱)^۲}=\frac{a^۲+a-۶}{\underbrace{(x+a+۱)^۲}_{\text{همواره}>۰}}$$

$$f'(x)<۰ \Rightarrow a^۲+a-۶<۰ \Rightarrow (a+۳)(a-۲)<۰ \Rightarrow -۳<a<۲ \quad (I)$$

گام دوم: هم‌چنین ریشهٔ مخرج کسر، نباید در بازهٔ $(-\infty,۰)$ باشد؛ پس:

ریشهٔ مخرج کسر: $x=-a-۱$

$$۰\le -a-۱ \Rightarrow a\le -۱ \quad (II)$$

گام سوم: بین شرط‌های (I) و (II) اشتراک می‌گیریم.

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I) و (II)}} -۳<a\le -۱ \quad (*)$$

محدودهٔ $(*)$ شامل دو عدد صحیح -۱ و -۲ است.

تست و پاسخ ۶

نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲۰|\sqrt[۳]{x^۲}$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

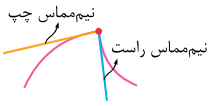
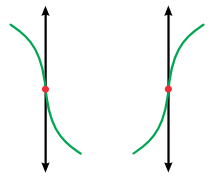
پاسخ: گزینهٔ ۲

پیداکردن نقاط بحرانی توابع شامل قدرمطلق و رادیکال از تیپ‌های رایج این مبحث است.

ریشهٔ عبارت زیر رادیکال و ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق، طول دو نقطه از نقاط بحرانی تابع f هستند.

$\underbrace{x=c}_{c\in D_f}$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f است، اگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نقاط مشتق‌ناپذیر:

اسم نقطه	توضیح	کجا می‌تواند رخ دهد؟	مثال نموداری
نقاط ناپیوستگی	هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم هست.	ریشه‌های مخرج نقاط صحیح داخل براکت مرز توابع چندضابطه‌ای	
گوشه‌ای	اولاً تابع در آن پیوسته است. ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست، دو عدد نابرابرند.» یا «مشتق یک طرف، عدد و طرف دیگری بی‌نهایت است.»	ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق مرز توابع چندضابطه‌ای	
عطف قائم	مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های هم‌علامت هستند.	عامل صفرکنندهٔ داخل رادیکال	
بازگشتی	مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت هستند.		

گام اول: تابع f در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال یعنی $x=0$، مشتق بی‌نهایت دارد (مشتق‌ناپذیر است)، پس $x=0$ یکی از نقاط بحرانی تابع است.

گام دوم: ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $x=20$، نقطهٔ زاویه‌دار (گوشه‌ای) است و تابع در آن مشتق‌ناپذیر است؛ پس $x=20$ هم طول یکی از نقاط بحرانی است.

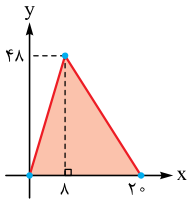
گام سوم: حالا $f'(x)=0$ را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که عبارت داخل قدرمطلق چه با علامت مثبت و چه با علامت منفی از قدرمطلق خارج شود، تأثیری بر ریشهٔ $f'(x)=0$ ندارد، پس فرض می‌کنیم با علامت مثبت از قدرمطلق خارج شود.

$$f(x)=(x-20)\overbrace{\sqrt[3]{x^2}}^{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{5}{3}}-20x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{40}{3}x^{\frac{-1}{3}}=0 \Rightarrow \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{40}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow \frac{5x-40}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow 5x-40=0 \Rightarrow x=8$$

پس $x=8$ طول نقطهٔ بحرانی سوم است.

گام چهارم: عرض نقاط بحرانی را به دست آورده و این نقاط را روی دستگاه مختصات نشان می‌دهیم.



$$x=0 \Rightarrow f(0)=|0-20|\times\sqrt[3]{0^2}=0$$

$$x=20 \Rightarrow f(20)=|20-20|\times\sqrt[3]{20^2}=0$$

$$x=8 \Rightarrow f(8)=|8-20|\times\sqrt[3]{8^2}=48$$

گام پنجم: مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با $\frac{20\times 48}{2}=480$ است.

تست و پاسخ ۷

تابع $f(x)=|2x^2-1|+\sqrt{|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) سه ۲) پنج ۳) هفت ۴) نُه

پاسخ: گزینهٔ ۲

ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق، ریشهٔ عبارت زیر رادیکال و جواب‌های $f'(x)=0$ را بررسی کنید.

گام اول: ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق، طول نقاط زاویه‌دار (گوشه‌ای) هستند که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است؛ پس جزء نقاط بحرانی تابع هستند.

$$2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام دوم: مشتق در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال بی‌نهایت می‌شود (مشتق در آن وجود ندارد)، پس ریشهٔ عبارت زیر رادیکال هم جزء نقاط بحرانی است.

$$|x|=0 \Rightarrow x=0$$

گام سوم: با محدوده‌بندی بر روی x، قدرمطلق را در هر محدوده برداشته و از تابع مشتق می‌گیریم. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ سایر نقاط بحرانی را در صورت وجود مشخص خواهند کرد.

اگر $x\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f(x)=2x^2-1+\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{-x}}=0$

$$\Rightarrow \frac{8x\sqrt{-x}-1}{2\sqrt{-x}}=0 \Rightarrow 8x\sqrt{-x}=1 \xrightarrow{x\le 0}$$ ریشه ندارد.

اگر $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x\le 0$: $f(x)=-2x^2+1+\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x)=-4x-\frac{1}{2\sqrt{-x}}=0$

$$\Rightarrow \frac{-8x\sqrt{-x}-1}{2\sqrt{-x}}=0 \Rightarrow -8x\sqrt{-x}=1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -64x^3=1 \Rightarrow x^3=-\frac{1}{64} \Rightarrow x=-\frac{1}{4} \checkmark$$

اگر $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f(x)=-2x^2+1+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=-4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

$$\Rightarrow \frac{-8x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow -8x\sqrt{x}=-1 \Rightarrow x\sqrt{x}=\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^3=\frac{1}{64} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \checkmark$$

اگر $x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f(x)=2x^2-1+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow \frac{8x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 8x\sqrt{x}=-1 \xrightarrow{0<x}$ ریشه ندارد.

گام چهارم: پس در کل پنج نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\{-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ داریم.

تست و پاسخ ۸

حاصل‌ضرب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6a-2x}$ برابر $6\sqrt{3}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

در سؤالات مبحث ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع، باید حواستان به دامنهٔ تابع باشد. نقاط ابتدا و انتهای دامنه جزء نقاط بحرانی تابع هستند.

از تابع f مشتق بگیرید و ریشه(های) $f'(x)=0$ را به دست آورید. حواستان به دامنهٔ تابع باشد.

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}: 0\le x\\ \sqrt{6a-2x}: 0\le 6a-2x \Rightarrow x\le 3a\end{array}\right\} \Rightarrow D_f=[0,3a]$$

گام دوم: از تابع f مشتق می‌گیریم و معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6a-2x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{6a-2x}} \xrightarrow{f'(x)=0} \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{6a-2x}}=0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{6a-2x}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج‌ها}\neq 0} 2\sqrt{x}=\sqrt{6a-2x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4x=6a-2x \Rightarrow 6x=6a \Rightarrow x=a$$

گام سوم: نقاط بحرانی تابع $x=a$، $x=0$ و $x=3a$ هستند. مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(0)=\sqrt{0}+\sqrt{6a-0}=\sqrt{6a}\\ f(a)=\sqrt{a}+\sqrt{6a-2a}=\sqrt{a}+2\sqrt{a}=3\sqrt{a} \Rightarrow \text{Max}\\ f(3a)=\sqrt{3a}+\sqrt{6a-6a}=\sqrt{3a} \Rightarrow \text{Min}\end{cases}$$

توجه کنید با توجه به دامنهٔ تابع و صورت سؤال، حتماً $a>0$ است.

گام چهارم: حاصل‌ضرب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق به‌دست‌آمده را برابر با $6\sqrt{3}$ قرار می‌دهیم.

$$\text{Max}.\text{Min}=3\sqrt{a}\times\sqrt{3a}=6\sqrt{3} \Rightarrow 3a\sqrt{3}=6\sqrt{3} \Rightarrow a=2$$

تست و پاسخ ۹

اگر $f(x)=x^3-4x+1$ و $g(x)=2(1-\cos x)(1+\cos x)$، آن‌گاه مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=(fog)(x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $2-\frac{16}{3\sqrt{3}}$ ۳) $1+\frac{16}{3\sqrt{3}}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

تابع g را ساده کنید و حدود تغییرات آن را به دست آورید. حدود تغییرات $g(x)$ را به عنوان دامنهٔ تابع f فرض کنید.

گام اول: ابتدا تابع g را ساده می‌کنیم.

$$g(x)=2(1-\cos x)(1+\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x$$

گام دوم: برد تابع g را به دست می‌آوریم. توجه کنید که برای تابع $f(g(x))$، خروجی‌های تابع g، ورودی‌های تابع f خواهند بود.

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0\le \sin^2 x\le 1 \xrightarrow{\times 2} 0\le 2\sin^2 x\le 2$$

به عبارت دیگر ورودی‌های تابع f در بازهٔ $[0,2]$ خواهند بود.

گام سوم: حال باید Max و Min تابع f را در دامنهٔ $[0,2]$ به دست آوریم. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. برای این منظور $f'(x)$ را حساب کرده و ریشه‌های $f'(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=x^3-4x+1$$

$$f'(x)=3x^2-4 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{3}}\\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

توجه کنید که تنها $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ در محدودهٔ $[0,2]$ قرار دارد و قابل قبول است.

گام چهارم: نقاط بحرانی تابع $x=0$ ، $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ و $x=2$ هستند. مقدار تابع f را در این نقاط به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f(0)=1 \Rightarrow \text{Max} \\ f(\frac{2}{\sqrt{3}})=(\frac{2}{\sqrt{3}})^3-4(\frac{2}{\sqrt{3}})+1=\frac{8}{3\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{3}}+1=1-\frac{16}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Min} \\ f(2)=2^3-4(2)+1=1 \Rightarrow \text{Max} \end{cases}$$

گام پنجم: مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $fog(x)$ برابر با $2-\frac{16}{3\sqrt{3}}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۰

در تابع درجه‌سوم $y=f(x)$، اگر $f'(6)=f'(-2)$، آن‌گاه طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $y=f'(x)$ کدام است؟

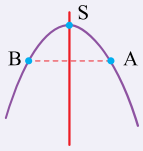
۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

روی اطلاعات داده‌شده و خواستهٔ سؤال تمرکز کنید. در بسیاری از سؤالات، فقط داده‌های مورد نیاز شما ارائه شده است و تمام اطلاعات داده نشده است.

تابع $f'(x)$ یک تابع درجه‌دوم است. طبق تساوی $f'(6)=f'(-2)$، دو نقطه به طول‌های -2 و ۶ نسبت به محور تقارن سهمی f' قرینه هستند و محور تقارن سهمی طول اکسترمم نسبی سهمی را نتیجه می‌دهد.

اگر دو نقطه روی یک سهمی، عرض یکسان داشته باشند، این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه هستند؛ بنابراین میانگین طول این دو نقطه برابر با طول محور تقارن سهمی یا همان طول رأس سهمی است.



$$x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$$

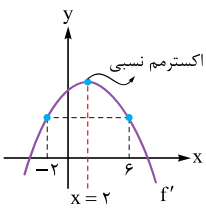
گام اول: ضابطهٔ تابع درجه‌سوم f را به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ در نظر می‌گیریم و سپس $f'(x)$ را حساب می‌کنیم.

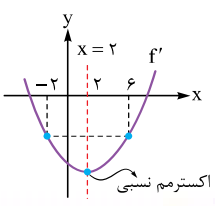
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

گام دوم: تابع f' یک تابع درجه‌دوم است. از $f'(6)=f'(-2)$ نتیجه می‌گیریم که دو نقطه به طول‌های $x=-2$ و $x=6$ روی سهمی f'، دارای عرض‌های یکسان هستند، پس این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی، قرینهٔ هم هستند؛ در نتیجه میانگین طول آن‌ها، معادلهٔ محور تقارن سهمی یا طول رأس سهمی را نتیجه می‌دهد.

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-2+6}{2}=2$$

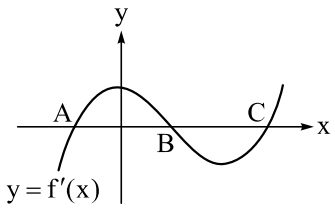
گام سوم: در تابع درجه‌دوم f'، طول رأس سهمی همان طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است که در این‌جا $x=2$ به دست آمد.





تست و پاسخ ۱۱

مطابق شکل، نمودار مشتق تابع f رسم شده است. اگر $AB = BC = ۳$ و فاصلهٔ بین نقاط مینیمم نسبی تابع f برابر با ۱۰ باشد، اختلاف مقادیر $f(A)$ و $f(C)$ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

هر جا نمودار f' محور xها را قطع می‌کند و علامت آن از منفی به مثبت تغییر می‌کند، مینیمم تابع f است.

تابع مشتق و نمودار آن

f یک تابع است. تابع مشتق (f')، تابعی است که دامنهٔ آن نقاطی از دامنهٔ تابع است که f در آن‌ها مشتق‌پذیر باشد.

ضابطهٔ f' نیز معمولاً از فرمول‌های مشتق به دست می‌آید.

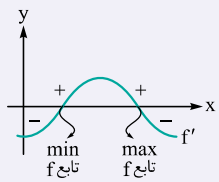
اگر f در نقطه‌ای مثل $x = a$ به هر دلیلی مشتق نداشته باشد (ناپیوستگی، عدم برابری مشتق چپ و راست، بی‌نهایت‌شدن مشتق)، a عضو دامنهٔ f' نبوده و نمودار تابع f' در نقطه $x = a$ تعریف نشده است.

اگر f در بازه‌ای اکیداً صعودی باشد، $f' > ۰$ و نمودار f' در آن بازه، بالای محور xها است.

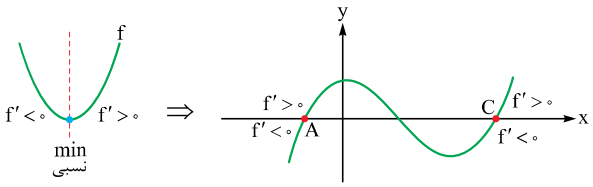
گر f در بازه‌ای اکیداً نزولی باشد، $f' < ۰$ و نمودار f' در آن بازه، پایین محور xها است.

اگر نمودار در نقطه‌ای مماس افقی داشته باشد، نمودار f' در آن نقطه محور xها را قطع می‌کند، چون مشتق در آن نقطه صفر می‌شود.

در نقطه‌ای که f' محور xها را قطع می‌کند و علامتش از $(+)$ به $(-)$ تغییر می‌کند، تابع f دارای ماکزیمم نسبی است. اگر علامت f' از $(-)$ به $(+)$ تغییر کند، تابع f دارای مینیمم نسبی است.



گام اول: با توجه به نمودار تابع f'، از آن‌جایی که تابع در نقاط A و C از مقادیر منفی به مثبت تغییر علامت داده است؛ پس این نقاط طول نقاط مینیمم نسبی تابع f هستند.



پس نقاط مینیمم نسبی تابع f، $(A, f(A))$ و $(C, f(C))$ هستند.

گام دوم: فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f را حساب کرده و برابر با ۱۰ قرار می‌دهیم.

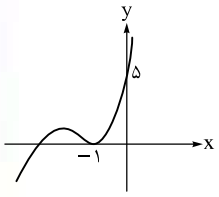
$$\sqrt{(C-A)^۲ + (f(C)-f(A))^۲} = ۱۰ \Rightarrow (C-A)^۲ + (f(C)-f(A))^۲ = ۱۰۰ \quad (۱)$$

گام سوم: طبق صورت سؤال $AB = BC = ۳$ است، پس $AC = AB + BC = ۶$ می‌شود، یعنی $C - A = ۶$ است. در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۶^۲ + (f(C)-f(A))^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow (f(C)-f(A))^۲ = ۶۴ \Rightarrow |f(C)-f(A)| = ۸$$

تست و پاسخ ۱۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است. طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۳}$

۲) -۲

۳) -۳

۴) $\frac{-۱۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مختصات نقاط $(۰,۵)$ و $(-۱,۰)$ در تابع f صدق می‌کنند. شرط $f'(-۱)=۰$ نیز برقرار است.

گام اول: طبق نمودار $f(۰)=۵$ است؛ پس:

$$۰^۳+a(۰^۲)+b(۰)+c=۵ \Rightarrow c=۵ \Rightarrow f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۵$$

گام دوم: هم‌چنین طبق نمودار $f(-۱)=۰$ است؛ پس:

$$(-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)+۵=۰ \Rightarrow -۱+a-b+۵=۰ \Rightarrow a-b=-۴ \quad (۱)$$

گام سوم: طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابعِ پیوسته و مشتق‌پذیر f برابر با $x=-۱$ است؛ پس $f'(-۱)$ باید صفر باشد، از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax+b$$

$$f'(-۱)=۰ \Rightarrow ۳(-۱)^۲+۲a(-۱)+b=۰ \Rightarrow ۳-۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a-b=۳ \quad (۲)$$

گام چهارم: معادلات (۱) و (۲) را در دستگاه حل می‌کنیم تا a و b را به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\times(-۱)} \begin{cases} a-b=-۴ \\ ۲a-b=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=۴ \\ ۲a-b=۳ \end{cases}$$

جمع: $a=۷, ۷-b=-۴ \Rightarrow b=۱۱$

$$f'(x)=۳x^۲+۱۴x+۱۱ \quad \text{و} \quad f(x)=x^۳+۷x^۲+۱۱x+۵ \quad \text{:در نتیجه}$$

گام پنجم: از معادلهٔ $f'(x)=۰$، طول اکسترمم نسبی دیگر تابع که از نوع ماکزیمم نسبی است را به دست می‌آوریم.

$$۳x^۲+۱۴x+۱۱=۰ \xrightarrow[x_۱=-۱, x_۲=-\frac{C}{A}]{B=A+C} \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=-\frac{۱۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \text{طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی}$$

تست و پاسخ ۱۳

اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=\frac{x}{x^۲+x+۱}$، آن‌گاه تابع f.g فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی خواهد داشت؛ طول این نقطه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) ۱

۴) -۱

@Azmoniko1

پاسخ: گزینهٔ ۲

تابع f.g را تشکیل دهید و با استفاده از مشتق‌گیری، نقطهٔ اکسترمم نسبی آن را مشخص کنید.

۱) قضایای مشتق‌گیری:

	رابطه	مثال
ضریب عددی	$a.\square \xrightarrow{'} a.\square'$	$۵x^۳ \xrightarrow{'} ۵(۳x^۲)=۱۵x^۲$
جمع و تفریق	$f\pm g \xrightarrow{'} f'\pm g'$	$۴x^۷-\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{'} ۲۸x^۶-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$
ضرب	$f.g \xrightarrow{'} f'.g+f.g'$	$x^۲(\sqrt{x}+۱) \xrightarrow{'} ۲x(\sqrt{x}+۱)+x^۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$
تقسیم	$\frac{f}{g} \xrightarrow{'} \frac{f'.g-f.g'}{g^۲}$	$\frac{x+۴}{۲x^۳-۱} \xrightarrow{'} \frac{۱(۲x^۳-۱)-۶x^۲(x+۴)}{(۲x^۳-۱)^۲}$
ترکیب	$f(\square) \xrightarrow{'} \square'.f'(\square)$	$f(x^۲+۲x-۳) \xrightarrow{'} (۲x+۲).f'(x^۲+۲x-۳)$

۲) طریقهٔ پیداکردن اکسترمم‌های نسبی:

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، نقاط اکسترمم نسبی را پیدا می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** f' را حساب می‌کنیم.
		گام دوم: f' را تعیین علامت می‌کنیم: ریشه‌های f' f' : − 0 + 0 − 0 − f : ↘ min ↗ max ↘ ↘
		گام سوم: هر جا f' از $+$ به $-$ رفته بود، max نسبی و هر جا از $-$ به $+$ رفته بود، min نسبی داریم.

گام اول: ابتدا تابع $y=(f\times g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$y=f(x)\times g(x)=(x+a)\times\frac{x}{x^۲+x+۱}=\frac{x^۲+ax}{x^۲+x+۱}$$

گام دوم: مشتق y را حساب می‌کنیم.

$$y'=\frac{(۲x+a)(x^۲+x+۱)-(۲x+۱)(x^۲+ax)}{(x^۲+x+۱)^۲} \Rightarrow y'=\frac{۲x^۳+ax^۲+۲x^۲+ax+۲x+a-۲x^۳-x^۲-۲ax^۲-ax}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(۱-a)x^۲+۲x+a}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

گام سوم: برای آن‌که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد، باید معادلهٔ $y'=0$ فقط یک ریشهٔ ساده داشته باشد که در آن تغییر علامت دهد؛ در نتیجه معادلهٔ $(1-a)x^2+2x+a=0$ باید از درجهٔ یک باشد و ضریب x^2 باید صفر باشد؛ پس:

$$1-a=0 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$	
y'	$-$	0	$+$
	$\searrow$	min	$\nearrow$

توجه کنید که معادلهٔ درجه‌دو در هیچ حالتی نمی‌تواند فقط یک ریشهٔ ساده داشته باشد.

تست و پاسخ ۱۴

اگر $M(2,3)$ نقطهٔ اکسترمم تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+\frac{b}{x-1}$ باشد، برد تابع شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

یکی از روش‌های به دست آوردن برد تابع، رسم نمودار تابع است. توجه کنید که در این گونه سؤالات باید یکنوایی تابع در دامنه‌اش و اکسترمم‌های آن را با استفاده از مشتق بررسی کنید.

مختصات نقطهٔ $M(2,3)$ در تابع f صدق می‌کند. شرط $f'(2)=0$ نیز برقرار است.

گام اول: مختصات نقطهٔ اکسترمم تابع در تابع صدق می‌کند، یعنی $f(2)=3$ است.

$$f(2)=2a+\frac{b}{2-1}=3 \Rightarrow 2a+b=3 \quad (1)$$

گام دوم: در تابع مشتق‌پذیر f، $x=2$ طول نقطهٔ اکسترمم است؛ پس باید $f'(2)=0$ باشد. مشتق تابع را حساب می‌کنیم و مقدار آن را در $x=2$ برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1}$$

$$f'(x)=a-\frac{b}{(x-1)^2} \xrightarrow{f'(2)=0} a-\frac{b}{(2-1)^2}=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \quad (2)$$

گام سوم: از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a=b \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=b=1$$

در نتیجه:

$$f(x)=x+\frac{1}{x-1}\ ,\ f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

گام چهارم: ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ را به دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را در تابع قرار می‌دهیم تا نقاط اکسترمم نسبی تابع به دست آیند:

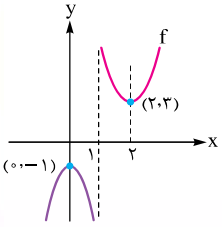
$$1-\frac{1}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow (x-1)^2=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2)=3 \\ x=0 \Rightarrow f(0)=-1 \end{cases}$$

گام پنجم: با تعیین علامت تابع f'، رفتار تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

x		0		1		2	
f'	$+$	0	$-$	∄	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max				min	

گام ششم: با توجه به جدول تعیین علامت f'، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



مطابق نمودار، برد تابع f شامل اعداد صحیح ۱، ۲ و ۰ نیست.

تست و پاسخ ۱۵

اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}(x-1) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$، آن‌گاه تابع fog چند ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲

در توابع شامل قدرمطلق، با استفاده از تعیین علامت، قدرمطلق را حذف کنید و تابع را به صورت دو یا چند ضابطه‌ای بنویسید.

تابع fog را تشکیل دهید و نمودار آن را رسم کنید.

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم.

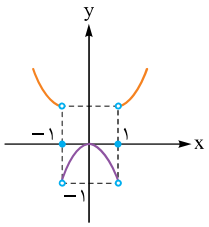
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x-1)=x-1 & ,\ 0<x\\ 0 & ,\ x=0\\ \frac{-x}{x}(x-1)=-x+1 & ,\ x<0\end{cases}$$

گام دوم: تابع fog را تشکیل می‌دهیم.

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}g(x)-1 & ,\ 0<g(x)\\ 0 & ,\ g(x)=0\\ -g(x)+1 & ,\ g(x)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}1-x^2-1=-x^2 & ,\ \boxed{0<1-x^2}\Rightarrow\boxed{x^2<1\Rightarrow -1<x<1}\\ 0 & ,\ \boxed{1-x^2=0}\Rightarrow\boxed{x^2=1\Rightarrow x=\pm 1}\\ -1+x^2+1=x^2 & ,\ \boxed{1-x^2<0}\Rightarrow\boxed{1<x^2\Rightarrow x<-1 \text{ یا } 1<x}\end{cases}$$

گام سوم: نمودار تابع fog را رسم می‌کنیم.



گام چهارم: طبق نمودار، تابع تنها یک ماکزیمم نسبی دارد که در $x=0$ است.

تست و پاسخ ۱۶

می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب‌مستطیل با قاعدهٔ مربع به حجم ۱۰ متر مکعب و در باز بسازیم. قیمت مصالح مورد نیاز کف برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و برای دیوارهای کناری ۴۰ هزار تومان است. حداقل هزینهٔ مصالح مورد نیاز برای ساخت این مخزن چند میلیون تومان است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

در سؤالات بهینه‌سازی، متغیرهای سؤالات و ارتباط بین آن‌ها را خوب شناسایی کنید.

ابتدا شکل سؤال را رسم کنید و متغیرها را روی آن نشان دهید.

بهینه‌سازی

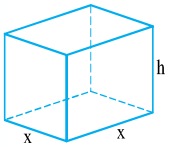
در مسائل بهینه‌سازی روال کار به صورت زیر است:

۱) در صورت امکان از مسئله، شکلی رسم کنید و متغیرها و مقادیر ثابت را مشخص کنید.

۲) کمیتی که باید بهینه شود را شناسایی کنید و رابطهٔ اصلی را برای آن بنویسید.

۳) با استفاده از رابطه(های) کمکی، رابطهٔ اصلی را تک‌متغیره کنید.

۴) از رابطهٔ اصلی که تک‌متغیره شده است مشتق بگیرید. با در نظر گرفتن دامنهٔ رابطهٔ اصلی، نقاط بحرانی آن را به دست آورید و نهایتاً مقادیر ماکزیمم یا مینیمم مطلق آن را حساب کنید.



گام اول: ابتدا شکل سؤال را رسم می‌کنیم و متغیرهای سؤال را بر روی آن نشان می‌دهیم. ضلع مربع قاعده را با x و یال دیگر مکعب‌مستطیل را h می‌نامیم.

گام دوم: می‌خواهیم هزینهٔ مصالح مورد نیاز برای ساخت این مخزن را حداقل کنیم، پس رابطهٔ اصلی در این سؤال مربوط به هزینهٔ مصالح است که آن را با C نشان می‌دهیم و برحسب هزار تومان برابر است با:

رابطهٔ اصلی: $C = (\text{قیمت مصالح کف}) + (\text{قیمت مصالح دیوارهای کناری}) = ۱۰۰x^۲ + ۴۰(۴xh)$ (۱)

گام سوم: از آن‌جایی که رابطهٔ (۱) برحسب دو متغیر است، ابتدا باید با استفاده از یک رابطهٔ کمکی آن را تک‌متغیره کنیم. این رابطهٔ کمکی از حجم مخزن می‌آید که مقدار ثابت ۱۰ مترمکعب است. در واقع حجم مخزن ارتباط بین x و h را برای ما مشخص می‌کند:

رابطهٔ کمکی: $x^۲h = ۱۰ \Rightarrow h = \frac{۱۰}{x^۲}$ (۲)

گام چهارم: از رابطهٔ (۲) مقدار h را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم تا رابطهٔ اصلی فقط برحسب x شود و بتوانیم از آن مشتق بگیریم و مینیمم آن را مشخص کنیم.

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)} C(x) = ۱۰۰x^۲ + ۴۰(۴x \times \frac{۱۰}{x^۲}) = ۱۰۰x^۲ + \frac{۱۶۰۰}{x} \quad (۳)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۳) مشتق می‌گیریم و ریشه‌های $C'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم.

$$C'(x) = ۲۰۰x - \frac{۱۶۰۰}{x^۲} \xrightarrow{C'(x)=۰} ۲۰۰x - \frac{۱۶۰۰}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۸}{x^۲} \xrightarrow{x\neq ۰} x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

گام ششم: با قراردادن $x = ۲$ در $C(x)$، حداقل هزینهٔ مصالح به دست می‌آید.

$$C(۲) = ۱۰۰(۲)^۲ + \frac{۱۶۰۰}{۲} = ۴۰۰ + ۸۰۰ = ۱۲۰۰ \text{ هزار تومان} = ۱/۲ \text{ میلیون تومان}$$

تست و پاسخ ۱۷

اگر مخروطی که فاصلهٔ رأس از نقاط محیط قاعدهٔ آن ثابت و برابر ۶ است، بیشترین مقدار حجم را داشته باشد، نسبت قطر قاعده به ارتفاع آن کدام است؟

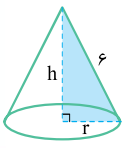
مخروط قائم است و اندازهٔ مولد آن ۶ است.

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

ابتدا شکل سؤال را رسم کنید و متغیرها را بر روی آن نشان دهید.

گام اول: شکل سؤال را رسم کرده و مجهولات سؤال را روی آن نشان می‌دهیم. شعاع قاعدهٔ مخروط را r و ارتفاع آن را با h مشخص می‌کنیم.



گام دوم: حجم مخروط بیشترین مقدار شده است، پس رابطهٔ اصلی در این سؤال مربوط به حجم مخروط است، آن را می‌نویسیم.

رابطهٔ اصلی: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$

گام سوم: رابطهٔ کمکی در این سؤال که ارتباط بین r و h را مشخص می‌کند، رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگی شکل صفحهٔ قبل:

رابطهٔ کمکی: $r^2+h^2=6^2=36 \Rightarrow r^2=36-h^2 \qquad (2)$

گام چهارم: رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا رابطهٔ اصلی تنها برحسب h شود.

$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)} V(h)=\frac{1}{3}\pi(36-h^2)h \Rightarrow V(h)=12\pi h-\frac{\pi}{3}h^3 \qquad (3)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۳) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $V'(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$V'(x)=12\pi-\pi h^2 \xrightarrow{V'(x)=0} 12\pi-\pi h^2=0 \Rightarrow h^2=12 \Rightarrow h=2\sqrt{3} \xrightarrow{(2)} r^2=36-12=24 \Rightarrow r=2\sqrt{6}$$

گام ششم: خواستهٔ سؤال $\frac{2r}{h}$ است که برابر با $\frac{2\times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۸

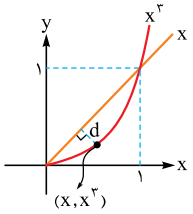
بیشترین فاصلهٔ نقاط تابع $f(x)=x^3$ و $0\le x\le 1$ از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نمودار دو تابع $y=x^3$ و $y=x$ را در محدودهٔ $[0,1]$ رسم کنید. مختصات نقاط روی تابع $y=x^3$ را به صورت (x,x^3) در نظر می‌گیریم.

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم. مختصات نقطهٔ روی منحنی $y=x^3$ را به صورت (x,x^3) در نظر می‌گیریم $(0\le x\le 1)$.



گام دوم: می‌خواهیم بیشترین فاصلهٔ نقاط تابع $y=x^3$ را در محدودهٔ $0\le x\le 1$ از خط $y=x$ به دست آوریم. رابطهٔ اصلی را می‌نویسیم.

خط: $x-y=0$

رابطهٔ اصلی: $d=\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \qquad (1)$

گام سوم: رابطهٔ کمکی در این سؤال $y=x^3$ است.

گام چهارم: رابطهٔ کمکی را در رابطهٔ اصلی جای‌گذاری می‌کنیم.

$$d(x)=\frac{|\overbrace{x-x^3}^{\ge 0}|}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x^3\le x \Rightarrow 0\le x-x^3]{0\le x\le 1} d(x)=\frac{x-x^3}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۲) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $d'(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$d'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}x^2 \xrightarrow{d'(x)=0} \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \xrightarrow{0\le x\le 1} x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (3)$$

گام ششم: از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم تا بیشترین مقدار d به دست آید.

$$d_{max}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}-(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۹\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۹}$$

تست و پاسخ ۱۹

یک ضلع مستطیلی بر محور xها و دو سر ضلع دیگر آن بر نمودارهای دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{۳-x}$ قرار دارد. اگر سطح این مستطیل در ناحیهٔ محدود به نمودارهای f، g و محور xها واقع باشد، بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

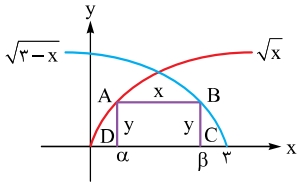
پاسخ: گزینهٔ ۴

نمودار دو تابع f و g را رسم کرده و متغیرهای سؤال را بر روی آن نشان دهید.

تبدیل‌های اصلی روی نمودارها، ۳ مدل‌اند: «**انتقال**»، «**قرینه‌یابی**» و «**انبساط و انقباض**»

		نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال ($a>۰$ و $b>۰$)	افقی	a واحد به راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
		a واحد به چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	عمودی	b واحد به بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
		b واحد به پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
قرینه‌یابی		قرینه نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.
		قرینه نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
		قرینه نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
انبساط و انقباض	افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{۲})$	جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم.
		انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$f(۲x)$	جای xها، $۲x$ می‌گذاریم.
	عمودی	انبساط با ضریب ۲	$۲f(x)$	کل ضابطه ضرب در ۲ می‌شود.
		انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}f(x)$	کل ضابطه ضرب در $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم. توجه کنید که برای رسم نمودار تابع $g(x)=\sqrt{۳-x}$، کافی است ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را سه واحد به چپ منتقل کنید تا نمودار $y=\sqrt{۳+x}$ به دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنید تا نمودار تابع $y=\sqrt{۳-x}$ به دست آید.



در مستطیل ABCD، طول نقطهٔ D را α و طول نقطهٔ C را β در نظر می‌گیریم، پس $D(\alpha,۰)$، $A(\alpha,\sqrt{\alpha})$، $C(\beta,۰)$ و $B(\beta,\sqrt{۳-\beta})$ است.

از آن‌جا که ABCD مستطیل است، پس $AD = BC$، در نتیجه: طبق شکل باید $y_A = y_B$ باشد؛ پس:

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{3-\beta} \Rightarrow \alpha = 3-\beta \Rightarrow \beta = 3-\alpha$$

گام دوم: می‌خواهیم مساحت مستطیل بیشترین مقدار باشد؛ پس رابطهٔ اصلی، مربوط به مساحت مستطیل است. (۱) $S = xy$:رابطهٔ اصلی

گام سوم: مقادیر x و y را با توجه به گام اول برحسب α به دست می‌آوریم. ارتباط x و y با α روابط کمکی ما در این مرحله هستند.

$$\text{روابط کمکی:} \begin{cases} x = \beta - \alpha = 3 - \alpha - \alpha = 3 - 2\alpha & (2) \\ y = \sqrt{\alpha} & (3) \end{cases}$$

گام چهارم: از روابط کمکی در تساوی (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا مساحت برحسب α به دست آید.

$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)\text{ و }(3)} S(\alpha) = (3-2\alpha)(\sqrt{\alpha}) = 3\sqrt{\alpha} - 2\alpha\sqrt{\alpha} \quad (4)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۴) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $S'(\alpha) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$S(\alpha) = 3\alpha^{\frac{1}{2}} - 2\alpha^{\frac{3}{2}}$$

$$S'(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}} - 3\alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} - 3\sqrt{\alpha} \xrightarrow{S'(\alpha)=0} \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} - 3\sqrt{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

گام ششم: مقدار $\alpha = \frac{1}{2}$ را در (۴) قرار می‌دهیم تا S_{max} به دست آید.

$$S_{max} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۲۰

اگر $a+b+c=2$ و $ab+bc+ca=1$، آن‌گاه ماکزیمم $|a-b|$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

از تساوی‌های داده‌شده $a+b$ و ab را برحسب c به دست آورید، سپس $|a-b|$ را برحسب c بنویسید.

گام اول: می‌خواهیم ماکزیمم $|a-b|$ را به دست آوریم؛ پس رابطهٔ اصلی به صورت زیر است:

$$A = |a-b| \quad (1) \text{ :رابطهٔ اصلی}$$

گام دوم: باید عبارت (۱) را برحسب یک متغیر بنویسیم تا بتوانیم از آن مشتق بگیریم. از تساوی‌های داده‌شده در صورت سؤال به عنوان رابطهٔ کمکی استفاده می‌کنیم.

$$a+b+c=2 \Rightarrow a+b = 2-c \quad (2)$$

$$ab+bc+ca=1 \Rightarrow ab + c\underbrace{(a+b)}_{2-c} = 1 \xrightarrow{(2)} ab + c(2-c) = 1 \Rightarrow ab = 1 - 2c + c^2 \quad (3)$$

از اتحادها می‌دانیم:

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \xrightarrow{(3)\text{ و }(2)} (a-b)^2 = (2-c)^2 - 4(1-2c+c^2) = 4 - 4c + c^2 - 4 + 8c - 4c^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = -3c^2 + 4c \xrightarrow{\text{جذر}} |a-b| = \sqrt{-3c^2+4c} \xrightarrow{(1)} A(c) = \sqrt{-3c^2+4c} \quad (4)$$

گام سوم: از (۴) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $A'(c) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$A'(c) = \frac{-6c+4}{2\sqrt{-3c^2+4c}} = \frac{-3c+2}{\sqrt{-3c^2+4c}} \xrightarrow{A'(c)=0} -3c+2=0 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

گام چهارم: مقدار $c = \frac{2}{3}$ را در (۴) قرار می‌دهیم تا A_{max} به دست آید.

$$A_{max} = \sqrt{-3(\frac{2}{3})^2 + 4(\frac{2}{3})} = \sqrt{-\frac{4}{3} + \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

فیزیک (۳): صفحه‌های ۶۱ تا ۷۶

تست و پاسخ ۲۱

در سونوگرافی از امواج فراصوتی با بسامد $۷/۵\,MHz$ استفاده می‌شود. اگر تندی انتشار این امواج در یکی از بافت‌های بدن $۱۵۰۰\,m/s$ باشد، طول موج این امواج در این بافت بدن چند میلی‌متر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

در تست‌های کنکور سؤال‌های ساده‌ای هم پیدا می‌شوند که فقط با یک رابطه حل می‌شوند.

رابطهٔ طول موج برحسب بسامد و تندی انتشار موج به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

λ: طول موج (m)، v: تندی انتشار موج (m/s)، f: بسامد (Hz)

با معلوم‌بودن بسامد و تندی انتشار موج، طول موج را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow[f = ۷/۵\,MHz = ۷/۵\times۱۰^{۶}\,Hz]{v=۱۵۰۰\,m/s} \lambda = \frac{۱۵۰۰}{۷/۵\times۱۰^{۶}} = ۰/۲\times۱۰^{-۳}\,m \Rightarrow \lambda = ۰/۲\,mm$$

تست و پاسخ ۲۲

یک تیغه با بسامد ۲/۵Hz روی سطح آب یک تشت موج نوسان کرده و موج تختی در سطح آب ایجاد می‌کند، به طوری که فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش برابر با ۱۶cm است. عمق آب را کاهش می‌دهیم تا تندی انتشار موج در سطح آن ۰/۲m/s تغییر کند. در این حالت فاصلهٔ یک برآمدگی تا سومین فرورفتگی بعد از آن به چند سانتی‌متر می‌رسد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

$\frac{\lambda}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

ابتدا طول موج و تندی انتشار موج در سطح آب را به دست آورید. سپس با توجه به ثابت‌ماندن بسامد، در محل کم‌عمق، تندی انتشار موج و طول موج را محاسبه کنید. در پایان نیز فاصلهٔ خواسته‌شده را پیدا کنید.

۱) هنگام ایجاد یک موج عرضی در سطح آب، فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش، برابر با نصف طول موج $(\frac{\lambda}{2})$ است.

۲) وقتی امواج سطحی آب به محلی می‌رسند که عمق آب کاهش می‌یابد، تندی این امواج نیز کم‌تر می‌شود.

۳) هرگاه موجی از یک محیط وارد محیط دیگری شود، طول موج و تندی انتشار آن به یک نسبت تغییر می‌کنند، اما بسامد آن ثابت می‌ماند، زیرا بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و با تغییر محیط، عوض نمی‌شود.

گام اول: ابتدا طول موج و تندی انتشار موج در سطح آب را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{2}=16 \Rightarrow \lambda=32\,cm=0/32\,m$$

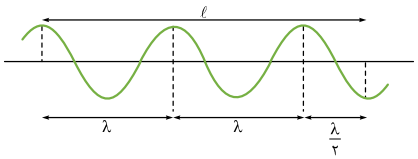
$$v=f\lambda \xrightarrow[\lambda=0/32m]{f=2/5Hz} v=2/5\times 0/32=0/8\,m/s$$

گام دوم: در محل کم‌عمق، تندی انتشار موج و طول موج را در سطح آب محاسبه می‌کنیم:

$$v_2=v_1-0/2 \xrightarrow{v_1=0/8m/s} v_2=0/8-0/2=0/6\,m/s$$

$$\lambda_2=\frac{v_2}{f_2} \xrightarrow[f_2=2/5Hz]{v_2=0/6m/s} \lambda_2=\frac{0/6}{2/5}=0/24\,m=24\,cm$$

گام سوم: فاصلهٔ یک برآمدگی تا سومین فرورفتگی را در محل کم‌عمق پیدا می‌کنیم:



$$\ell=\frac{5\lambda}{2} \xrightarrow{\lambda=24cm} \ell=60\,cm$$

تست و پاسخ ۲۳

جرم ریسمان A، ۲ برابر جرم ریسمان B، طول ریسمان A، ۳ برابر طول ریسمان B و اندازهٔ نیروی کشش ریسمان A، ۵۰ درصد بیشتر از اندازهٔ نیروی کشش ریسمان B است. اگر زمانی که طول می‌کشد تا یک موج عرضی طول ریسمان‌های A و B را طی کند، به ترتیب t_A و t_B باشد، حاصل $\frac{t_A}{t_B}$ کدام است؟

$F_A=1/5F_B$

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

۱) تندی انتشار موج در یک ریسمان کشیده‌شده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

v: تندی انتشار موج (m/s)، F: نیروی کشش (N)، L: طول ریسمان (m)، m: جرم ریسمان (kg)

پس برای مقایسهٔ تندی انتشار موج در دو ریسمان A و B می‌توان نوشت:

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{F_B}{F_A} \times \frac{L_B}{L_A} \times \frac{m_A}{m_B}}$$

۲) تندی انتشار موج در یک محیط معین، ثابت فرض می‌شود، یعنی حرکت آن یکنواخت است.

برای هر دو ریسمان A و B، رابطهٔ زمان انتشار موج را برحسب مسافت طی‌شده و تندی انتشار آن می‌نویسیم و نسبت آن‌ها را به دست می‌آوریم:

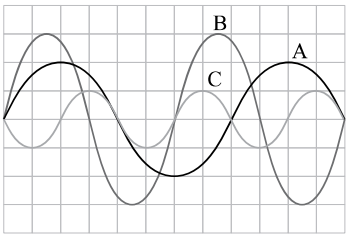
$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{\frac{L_A}{v_A}}{\frac{L_B}{v_B}} = \frac{L_A}{L_B} \times \frac{v_B}{v_A} = \frac{L_A}{L_B} \times \sqrt{\frac{F_B}{F_A} \times \frac{L_B}{L_A} \times \frac{m_A}{m_B}} \xrightarrow[m_A = ۲m_B \,,\, L_A = ۳L_B]{F_A = F_B + ۰/۵F_B = ۱/۵F_B} \frac{t_A}{t_B} = \frac{۳L_B}{L_B} \times \sqrt{\frac{F_B}{۱/۵F_B} \times \frac{L_B}{۳L_B} \times \frac{۲m_B}{m_B}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_A}{t_B} = ۳ \times \sqrt{\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times ۲} = ۳ \times \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{t_A}{t_B} = ۲$$

@Azmoniko1

تست و پاسخ ۲۴

تصویر سه موج مکانیکی عرضی سینوسی A، B و C که در یک محیط منتشر شده‌اند، در یک لحظهٔ معین به شکل زیر است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این موج‌ها درست است؟ (موج‌ها هم‌نوع‌اند.)



الف) بسامد موج C، $\frac{۳}{۲}$ برابر بسامد موج B است.

ب) توان متوسط موج C، ۴ برابر توان متوسط موج A است.

پ) دورهٔ تناوب موج A، $\frac{۱}{۲}$ برابر دورهٔ تناوب موج C است.

ت) مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی موج A، $\frac{۱}{۴}$ برابر مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی موج B است.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

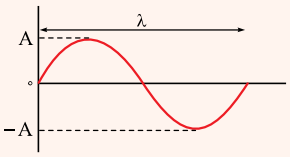
پاسخ: گزینهٔ ۲

۱) هنگامی‌که یک موج عرضی در محیط منتشر می‌شود، فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، طول موج برابر با مسافتی است که موج در مدت یک دورهٔ تناوب نوسان چشمه طی می‌کند.

۲) بیشترین فاصلهٔ یک ذره از مکان تعادل خود، دامنه (A) نام دارد.

۳) مدت‌زمانی‌که هر ذرهٔ محیط، یک نوسان کامل انجام می‌دهد، دورهٔ تناوب گفته می‌شود.

۴) تعداد نوسان‌های انجام‌شده در هر ثانیه، توسط هر ذرهٔ محیط را بسامد می‌گوییم.



$$f=\frac{۱}{T}\leftarrow \text{بسامد (Hz)}$$
$$\downarrow$$
$$\text{دورهٔ تناوب (s)}$$

۵) توان متوسط یک موج سینوسی مکانیکی، یعنی مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی آن، با مربع دامنه $(A^۲)$ و مربع بسامد $(f^۲)$ چشمهٔ موج نسبت مستقیم دارد.

گام اول: با توجه به تصویر موج‌های داده‌شده و نیز یکسان‌بودن تندی انتشار هر سه موج که در یک محیط منتشر می‌شوند، داریم:

$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{v_B=v_C}\frac{f_C}{f_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_C}\xrightarrow{\lambda_B=۱/۵\lambda_C}\frac{f_C}{f_B}=\frac{۳}{۲}$$

پس عبارت «الف» درست است.

$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{v_A=v_C}\frac{f_C}{f_A}=\frac{\lambda_A}{\lambda_C}\xrightarrow{\lambda_A=۲\lambda_C}\frac{f_C}{f_A}=۲\xrightarrow{T=\frac{۱}{f}}\frac{T_A}{T_C}=۲$$

بنابراین عبارت «پ» نادرست است. همین‌جا معلوم می‌شود که ۲ صحیح است.

گام دوم: نسبت توان متوسط یک موج سینوسی مکانیکی یا مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(P_{av})_C}{(P_{av})_A}=(\frac{A_C}{A_A})^۲\times(\frac{f_C}{f_A})^۲\xrightarrow[f_C=۲f_A]{A_A=۲A_C}\frac{(P_{av})_C}{(P_{av})_A}=(\frac{A_C}{۲A_C})^۲\times(\frac{۲f_A}{f_A})^۲=\frac{۱}{۴}\times۴=۱$$

بنابراین عبارت «ب» نادرست است.

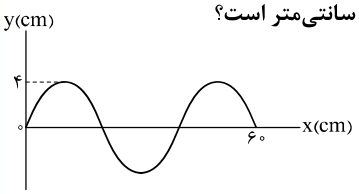
$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{v_A=v_B}\frac{f_A}{f_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\xrightarrow{\lambda_B=\frac{۳}{۴}\lambda_A}=\frac{f_A}{f_B}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{(P_{av})_A}{(P_{av})_B}=(\frac{A_A}{A_B})^۲\times(\frac{f_A}{f_B})^۲\xrightarrow[f_A=\frac{۳}{۴}f_B]{A_A=\frac{۲}{۳}A_B}\frac{(P_{av})_A}{(P_{av})_B}=(\frac{\frac{۲}{۳}A_B}{A_B})^۲\times(\frac{\frac{۳}{۴}f_B}{f_B})^۲=\frac{۴}{۹}\times\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

پس عبارت «ت» درست است.

تست و پاسخ ۲۵

تصویر موج عرضی سینوسی منتشرشده در یک طناب تحت کشش به چگالی خطی جرم $۲۰\,g/m$، در لحظه‌ای به شکل زیر است. اگر نیروی کشش طناب $۵۰\,N$ باشد، مسافت طی‌شده توسط هر یک از ذرات طناب در مدت $۱۲\,ms$ برابر چند سانتی‌متر است؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

۱) تندی انتشار موج در یک طناب تحت کشش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \leftarrow \text{تندی انتشار موج } (m/s)$$
$$F \rightarrow \text{نیروی کشش } (N)$$
$$\mu \rightarrow \text{چگالی خطی جرم } (kg/m)$$

۲) هنگام انتشار یک موج مکانیکی در محیط، هر یک از ذرات محیط، در یک نوسان کامل، مسافتی به اندازهٔ ۴ برابر دامنه را می‌پیمایند.

گام اول: تندی انتشار موج در طناب را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow[\mu = ۲۰\,g/m = ۲\times ۱۰^{-۲}\,kg/m]{F = ۵۰\,N} v = \sqrt{\frac{۵۰}{۲\times ۱۰^{-۲}}} = \sqrt{۲۵۰۰} = ۵۰\,m/s$$

گام دوم: با توجه به تصویر موج داده‌شده، طول موج و با استفاده از آن، دورهٔ تناوب موج را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۲}\lambda = ۶۰ \Rightarrow \lambda = ۴۰\,cm = ۰/۴\,m$$

$$\lambda = Tv \xrightarrow[v=۵۰\,m/s]{\lambda=۰/۴\,m} ۰/۴ = T \times ۵۰ \Rightarrow T = \frac{۴}{۵۰۰} = ۸ \times ۱۰^{-۳}\,s = ۸\,ms$$

$$\Delta t = ۱۲\,ms \xrightarrow{\frac{T}{۲}=۴\,ms} \Delta t = ۳ \times \frac{T}{۲}$$

گام سوم: هر ذره از محیط، در مدت نصف دوره $(\frac{T}{۲})$ مسافتی به اندازهٔ دو برابر دامنه $(۲A)$ را می‌پیماید. بنابراین مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $\Delta t = ۳ \times \frac{T}{۲}$ برابر است با:

$$\ell = ۳(۲A) \xrightarrow{A=۴\,cm} \ell = ۶ \times ۴ = ۲۴\,cm$$

تست و پاسخ ۲۶

چند مورد از عبارت‌های زیر دربارهٔ امواج صوتی نادرست است؟

الف) همواره امواج صوتی در جامدها، سریع‌تر از مایع‌ها و در مایع‌ها، سریع‌تر از گازها پیشروی می‌کنند.

ب) شدت موج صوتی در یک سطحِ عمود بر راستای انتشار آن، برابر است با انرژی‌ای که توسط موج به واحد سطح می‌رسد.

پ) بلندی یک صوت را، مانند شدت آن، می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت.

ت) بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ ۲۰ Hz تا ۲۰۰۰۰ Hz است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

موارد «الف» تا «ت» را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) عموماً صوت در جامدها سریع‌تر از مایع‌ها و در مایع‌ها سریع‌تر از گازها حرکت می‌کند، ولی استثناهایی نیز وجود دارد؛ بنابراین همواره درست نیست و عبارت «الف» نادرست است.

ب) شدت یک موج صوتی (I) در یک سطح، برابر با آهنگ متوسط انرژی‌ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد یا از آن عبور می‌کند. در عبارت «ب» به جای آهنگ متوسط انرژی یا توان از انرژی استفاده شده که نادرست است.

پ) شدت صوت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت، اما بلندی چیزی است که گوش ما حس می‌کند و ممکن است برای افراد مختلف یکسان نباشد؛ پس نمی‌توان آن را با یک آشکارساز اندازه گرفت و عبارت «پ» نادرست است.

ت) گرچه گوش انسان قادر به شنیدن تُن‌های صدای ۲۰ Hz تا ۲۰۰۰۰ Hz است، اما بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ ۲۰۰۰ Hz تا ۵۰۰۰ Hz است؛ بنابراین عبارت «ت» نیز نادرست است.

با بررسی عبارت‌ها معلوم می‌شود که هر چهار عبارت نادرست هستند و ۴ را انتخاب می‌کنیم.

تست و پاسخ ۲۷

شخصی در فاصلهٔ ۵۰متری از یک چشمهٔ صوت با توان خروجی $60\,mW$ قرار دارد. اگر تراز شدت صوت دریافتی شخص $56\,dB$ باشد، چند درصد از انرژی صوت حاصل از چشمه در طی این مسیر تلف شده است؟ $(\pi = 3/03 \text{ و } \log 2 = 0/3 \text{ و } I_0 = 10^{-6}\,\mu W/m^2)$

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

۱) رابطهٔ شدت صوت به صورت مقابل است: $I = \frac{P_{av}}{A}$

I: شدت صوت (W/m^2)

P_{av}: آهنگ متوسط انتقال انرژی یا توان صوتی (W)

A: مساحت سطحی که صوت به آن می‌رسد (m^2)

۲) جبهه‌های موج صوتی در هوا به صورت کروی فرض می‌شوند. $A = 4\pi r^2 \leftarrow$ مساحت سطح کره (m^2)

r: شعاع کره (m)

۳) شدت صوت و تراز شدت صوتی که واقعاً به گوش شنونده می‌رسند کم‌تر از مقداری است که در حالت آرمانی محاسبه می‌شوند، زیرا همواره بخشی از انرژی صوت حاصل از چشمهٔ صوتی در طی مسیر توسط مولکول‌های محیط جذب شده و عملاً تلف می‌شود.

گام اول: شدت صوتی را که در حالت آرمانی به گوش شنونده می‌رسد (I)، محاسبه می‌کنیم:

$$I=\frac{P_{av}}{A}=\frac{P_{av}}{4\pi r^2} \xrightarrow[\pi=3\ ,\ r=50\,m]{P_{av}=60mW=6\times10^{-2}W} I=\frac{6\times10^{-2}}{4\times3\times50^2} \Rightarrow I=\frac{10^{-2}}{5000} \Rightarrow I=2\times10^{-6}\,W/m^2=2\mu W/m^2$$

گام دوم: شدت صوتی را که در حالت واقعی به گوش شنونده رسیده است (I′)، محاسبه می‌کنیم:

$$\beta=10\log\left(\frac{I'}{I_0}\right) \xrightarrow[I_0=10^{-6}\,\mu W/m^2=10^{-12}\,W/m^2]{\beta=56\,dB} 56=10\log\left(\frac{I'}{10^{-12}}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{I'}{10^{-12}}\right)=5/6=5+0/6=\log10^5+2\log2=\log10^5+\log2^2=\log(4\times10^5) \Rightarrow \frac{I'}{10^{-12}}=4\times10^5$$

$$\Rightarrow I'=4\times10^{-7}=0/4\times10^{-6}\,W/m^2=0/4\mu W/m^2$$

گام سوم: درصد تغییر انرژی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{I'-I}{I}\times100=\frac{0/4-2}{2}\times100=\%-80$$

علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش انرژی است.

۲۸ تست و پاسخ

بسامد و طول موج صوت تولیدی یک منبع صوت ساکن به ترتیب f_0 و λ_0 است. شخصی با سرعت ثابت در حال دورشدن از این منبع است. اگر بسامد و طول موج صوت دریافتی توسط شخص به ترتیب f و λ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) f کوچک‌تر از f_0 و در حال کاهش است.

ب) f کوچک‌تر از f_0 و ثابت است.

پ) λ کوچک‌تر از λ_0 و در حال افزایش است.

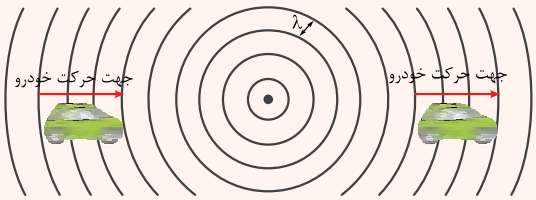
ت) λ کوچک‌تر از λ_0 و ثابت است.

@Azmoniko1

۱) الف و پ ۲) ب و ت ۳) الف ۴) ب

پاسخ: گزینهٔ ۱

۱) در یکی از حالت‌های خاص اثر دوپلر، اگر چشمهٔ صوت ساکن و ناظر (شنونده) متحرک باشد، در مدت‌زمان یکسان شنونده‌ای که به چشمهٔ ساکن نزدیک می‌شود با جبهه‌های موج بیشتری برخورد می‌کند، یعنی بسامد بیشتری دریافت می‌کند، اما شنونده‌ای که از آن دور می‌شود، با جبهه‌های موج کم‌تری برخورد می‌کند، یعنی بسامد کم‌تری دریافت می‌کند؛ اما طول موج حاصل از منبع در اطراف چشمهٔ صوت، در همه‌جا یکسان است.



۲) این‌که بسامد دریافتی توسط شنونده، نسبت به بسامد واقعی چشمهٔ صوت چه‌قدر و چگونه تغییر کند، به اندازه و جهت سرعت شنونده نسبت به چشمهٔ صوت بستگی دارد، اما به فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت ربطی ندارد.

گام اول: از آن‌جا که منبع صوت ساکن است، طول موج دریافتی توسط شخص با طول موج واقعی منبع صوت یکسان و ثابت است؛ بنابراین موارد «پ» و «ت» رد می‌شوند.

گام دوم: چون شنونده در حال دورشدن از منبع صوت است، بسامد دریافتی توسط او کم‌تر از بسامد منبع است و چون حرکت شنونده با سرعت ثابت است، به تدریج با دورترشدن شخص از منبع صوت، بسامد دریافتی تغییر نمی‌کند، یعنی مورد «الف» رد و مورد «ب» تایید می‌شود؛ بنابراین ۱ صحیح است.

تست و پاسخ ۲۹

یک موج الکترومغناطیسی در راستای عمود بر سطح زمین و به سمت بالا در حال پیشروی است. در یک نقطهٔ معین، در لحظه‌ای که میدان الکتریکی این موج به سمت شمال است، میدان مغناطیسی‌اش در چه جهتی است؟

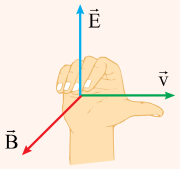
۱) شمال ۲) جنوب

۳) شرق ۴) غرب

پاسخ: گزینهٔ ۴

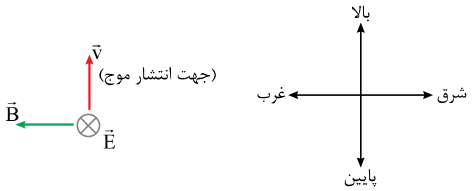
برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم:

اگر چهار انگشت دست راست در جهت میدان الکتریکی طوری قرار گیرد که میدان مغناطیسی از کف دست خارج شود. در این حالت انگشت شست، در جهت انتشار موج است.



طبق قاعدهٔ دست راست به صورت شکل زیر، جهت میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی را به دست می‌آوریم:

(**تذکر**: در صفحه، شمال را درون‌سو ⊗ و جنوب را برون‌سو ⊙ در نظر می‌گیریم.)



بنابراین جهت میدان مغناطیسی موج در لحظهٔ مورد نظر، به سمت غرب است.

تست و پاسخ ۳۰

کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ طیف امواج الکترومغناطیسی درست است؟

۱) بسامد پرتوهای گاما از بسامد میکروموج‌ها بیشتر است.

۲) در خلأ، تندی انتشار امواج فرابنفش از تندی انتشار امواج فروسرخ بیشتر است.

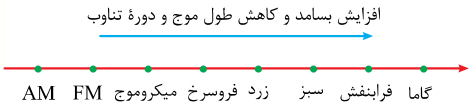
۳) طول موج امواج رادیویی FM از طول موج امواج رادیویی AM بیشتر است.

۴) دورهٔ تناوب نور مرئی سبزرنگ از دورهٔ تناوب نور مرئی زردرنگ بیشتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

شکل‌های کتاب درسی خیلی مهمن. حتماً شکل مربوط به ترتیب امواج الکترومغناطیسی رو بررسی کن و ترتیب رو حفظ باش.

مطابق شکل زیر، هر چه به سمت راست پیش می‌رویم، بسامد موج افزایش و طول موج و دورهٔ تناوب کاهش می‌یابد.



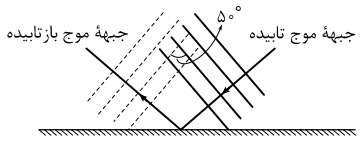
از طرفی تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان است.

بنابراین ۱ درست است.

فیزیک (۳): صفحه‌های ۷۶ تا ۹۴

تست و پاسخ ۳۱

شکل زیر، جبهه‌های فرودی و بازتابیدهٔ یک موج مکانیکی از یک سطح تخت و نمودار پرتویی مربوط به آن را نشان می‌دهد. زاویهٔ بازتابش این موج چند درجه است؟

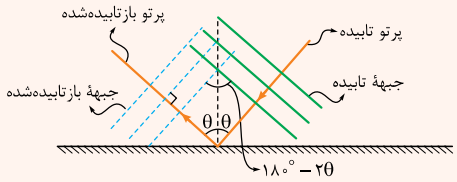


۱) ۲۰
۲) ۶۵
۳) ۴۰
۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

با استفاده از قانون بازتاب عمومی، مطابق شکل زیر اگر زاویهٔ تابش و بازتابش، برابر با θ باشند، داریم:

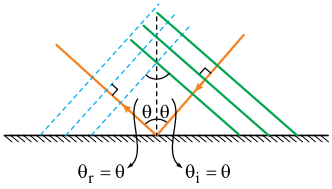


بنابراین زاویه‌ای که راستای جبهه‌های تابیده‌شده و بازتابیده‌شده با هم می‌سازند، برابر با $180^\circ - 2\theta$ است.

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ گفته‌شده، زاویهٔ بین راستای جبهه‌های تابیده و بازتابیده‌شده برابر است با:

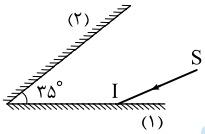
$$180^\circ - 2\theta = 50^\circ \Rightarrow 2\theta = 130^\circ \Rightarrow \theta = 65^\circ \Rightarrow \theta_i = \theta_r = \theta = 65^\circ$$

بنابراین زاویهٔ بازتابش این موج برابر با 65° است.



تست و پاسخ ۳۲

در شکل مقابل، پرتوی SI با زاویهٔ تابش 80° بر سطح آینهٔ تخت (۱) می‌تابد. زاویهٔ بین این دو آینهٔ تخت متقاطع را حداقل چند درجه و چگونه تغییر دهیم تا پرتوی بازتاب نهایی، نسبت به پرتوی تابش اولیه (SI)، 180° منحرف شود؟



یعنی پرتوی بازتاب نهایی بر روی پرتوی تابش اولیه برگردد.

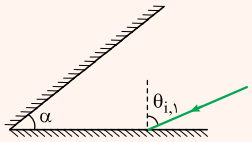
۱) 5°، افزایش
۲) 5°، کاهش
۳) 10°، افزایش
۴) 10°، کاهش

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره *برای بعضی سؤالای بازتاب موج تکنیک‌هایی وجود داره که اگه بلد باشی، راحت‌تر به جواب می‌رسی.*

درس‌نامه

اگر در دو آینهٔ تخت متقاطع با یکدیگر زاویهٔ حادهٔ α بسازند، برای این‌که پرتوی بازتاب نهایی نسبت به پرتوی تابش اولیه، 180° منحرف شود (یعنی بر روی خود پرتوی تابش در خلاف جهت برگردد)، باید نسبت اولین زاویهٔ تابش $(\theta_{i,1})$ به زاویهٔ بین دو آینه (α) عددی صحیح باشد. مطابق شکل زیر داریم:



$$\frac{\theta_{i,1}}{\alpha} = n$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ گفته‌شده برای این‌که زاویهٔ انحراف پرتوی بازتاب نهایی با پرتوی تابش اولیه 180° شود، داریم:

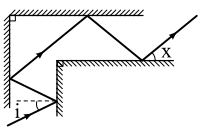
$$\frac{\theta_{i,1}}{\alpha} = n \xrightarrow{\theta_{i,1}=80^\circ} \frac{80^\circ}{\alpha} = n \Rightarrow \alpha = \frac{80^\circ}{n} \Rightarrow$$

n	۱	۲	۳	۴	۸
α	80°	40°	$26/7^\circ$	20°	10°

بنابراین کم‌ترین مقدار تغییرات زاویهٔ بین دو آینه (α) زمانی است که این زاویه از 35° به 40° برسد؛ یعنی 5° افزایش یابد.

تست و پاسخ ۳۳

شکل مقابل مسیر حرکت پرتویی را بین آینه‌های تخت متقاطع، که دوبه‌دو موازی‌اند، نشان می‌دهد. اگر زاویهٔ تابش $\hat{i}$ را 10° افزایش دهیم، زاویهٔ x چند درجه و چگونه تغییر می‌کند؟

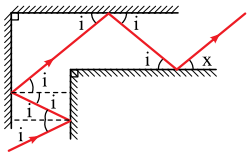


۱) ۱۰ درجه افزایش می‌یابد.
۲) ۲۰ درجه افزایش می‌یابد.
۳) ۱۰ درجه کاهش می‌یابد.
۴) ۲۰ درجه کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره **استفاده از قوانین هندسی در سؤالات بازتاب بسیار کمک کننده است.** *سعی کن قبل از این‌که پاسخ‌نامه رو نگاه کنی، خودت روی این سؤال بیشتر فکر کنی و یا با روش‌های هندسی دیگه حلش کنی.*

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا رابطهٔ زاویهٔ $\hat{x}$ با زاویهٔ $\hat{i}$ را پیدا می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



طبق قانون بازتاب عمومی و هم‌چنین برابربودن زاویهٔ حادهٔ ایجادشده از دو خط موازی و یک خط مورب، درمی‌یابیم که زاویهٔ $\hat{x}$ با زاویهٔ $\hat{i}$ برابر است.

گام دوم: با توجه به برابری زاویهٔ $\hat{x}$ با زاویهٔ $\hat{i}$ درمی‌یابیم که اگر زاویهٔ $\hat{i}$، ۱۰ درجه افزایش یابد، زاویهٔ x هم، ۱۰ درجه افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۳۴

موتورسواری که با سرعت ثابت $30\ m/s$ به طرف دیوار بزرگی در حال حرکت است، در لحظهٔ t_1 تیری را شلیک می‌کند. اگر او $4s$ پس از لحظهٔ t_1 پژواک صدای شلیک تیر را از دیوار بشنود، در لحظهٔ t_1 فاصله‌اش از دیوار چند متر بوده است؟ (تندی انتشار صوت در هوا را $340\ m/s$ در نظر بگیرید.)

۱) ۵۴۰ ۲) ۶۲۰ ۳) ۶۸۰ ۴) ۷۴۰

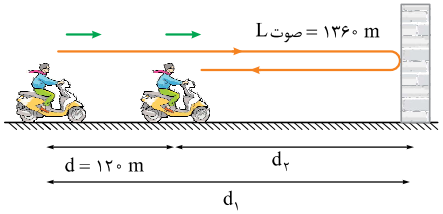
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** از لحظهٔ شلیک تیر تا زمانی که پژواک آن به گوش موتورسوار می‌رسد، مسافتی که صوت در هوا طی می‌کند را به دست می‌آوریم:

$$v_{صوت}=\frac{L}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=4s]{v_{صوت}=340m/s} 340=\frac{L}{4} \Rightarrow L=1360\ m$$

گام دوم: مسافتی که موتورسوار در مدت ۴s طی می‌کند را هم به دست می‌آوریم: $v=\frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=4s]{v=30m/s} 30=\frac{d}{4} \Rightarrow d=120\ m$

گام سوم: حال با توجه به شکل زیر، فاصلهٔ موتورسوار از دیوار در لحظهٔ شلیک تیر (d_1) را حساب می‌کنیم:

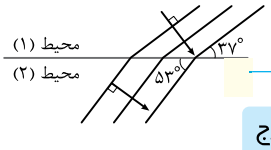


$$L_{صوت}=d+2d_2 \Rightarrow 1360=120+2d_2$$
$$\Rightarrow d_2=620\ m$$
$$d_1=d_2+d$$
$$\Rightarrow d_1=620+120=740\ m$$

تکنیک فاصلهٔ اولیهٔ موتورسوار از دیوار بیشتر از فاصلهٔ نهایی او از دیوار است. پس فاصلهٔ اولیه از نصف مسافتی که صوت طی کرد، $(\frac{L}{2})$ بیشتر است. یعنی جواب باید از $\frac{1360}{2}=680\ m$ بیشتر باشد. پس فقط ۴ می‌تواند درست باشد.

تست و پاسخ ۳۵

مطابق شکل جبهه‌های موجی با بسامد ۲۰۰۰ Hz از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده‌اند. اگر اختلاف تندی موج در دو محیط ۳۰۰ m/s باشد، طول موج آن در محیط (۱) چند سانتی‌متر است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$)

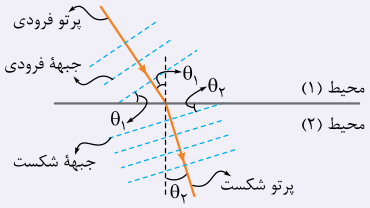


با توجه به کم‌تر بودن فاصلهٔ جبهه‌های موج در محیط (۱) نسبت به محیط (۲) درمی‌یابیم $v_2>v_1$ و $\lambda_2>\lambda_1$ است.

۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته مطابق شکل مقابل، می‌دانیم زاویهٔ جبههٔ موج با مرز دو محیط، همان زاویهٔ پرتوی موج با خط عمود بر مرز دو محیط (θ) است.



پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق نکتهٔ گفته‌شده، زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست را به دست می‌آوریم: $\theta_1=37^\circ \quad , \quad \theta_2=53^\circ$

گام دوم: طبق قانون شکست عمومی، تندی انتشار موج در محیط (۱) را حساب می‌کنیم:

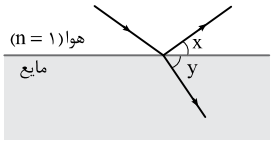
$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}=\frac{4}{3} \Rightarrow v_2=\frac{4}{3}v_1$$
$$v_2-v_1=300 \Rightarrow \frac{4}{3}v_1-v_1=300 \Rightarrow v_1=900\ m/s$$

گام سوم: طول موج در محیط (۱) را به دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \lambda_1=\frac{v_1}{f} \Rightarrow \lambda_1=\frac{900}{2000}=0/45\ m=45cm$$

تست و پاسخ ۳۶

مطابق شکل، یک پرتو موج الکترومغناطیسی تک‌رنگ با بسامد $۴\times۱۰^{۱۵}\ Hz$ از هوا به سطح یک مایع شفاف می‌تابد. بخشی از پرتو، بازتاب و بخش دیگری از آن شکسته شده و وارد مایع می‌شود. اگر $\cos x = \frac{۴}{۳}\cos y$ باشد، طول موج نور در مایع چند نانومتر است؟ $(c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s)$



۱) ۷۵

۲) ۱۰۰

۳) ۵۶/۲۵

۴) ۳۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

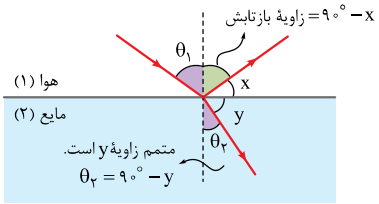
خودت حل کنی بهتره در محیط اول، به کمک رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، طول موج را به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ $\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$، طول موج در محیط دوم را به دست آورید. رابطهٔ بین زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست را به کمک $\cos y = \frac{۳}{۴}\cos x$ مشخص کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، طول موج پرتو در ناحیهٔ (۱) را به دست می‌آوریم:

$$\lambda_۱ = \frac{v_۱}{f} \xrightarrow{v_۱=c=۳\times۱۰^{۸}\ m/s} \lambda_۱ = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۴\times۱۰^{۱۵}} = ۰/۷۵\times۱۰^{-۷}\ m = ۷۵\times۱۰^{-۹}\ m = ۷۵\ nm$$

حواستون باشه با عبور موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد موج و دورهٔ تناوب آن ثابت می‌ماند، ولی طول موج و تندی انتشار موج تغییر می‌کند. مراقب باشید در دام تستی ۱ نیفتید.

گام دوم: به کمک رابطهٔ $\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$، طول موج در محیط (۲) را به دست می‌آوریم:



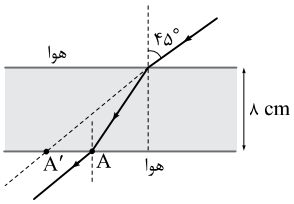
زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش برابر است، بنابراین $\theta_۱ = ۹۰^\circ - x$ است.

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{۷۵}=\frac{\sin(۹۰^\circ-y)}{\sin(۹۰^\circ-x)}$$

$$\xrightarrow{\sin(۹۰^\circ-y)=\cos y,\sin(۹۰^\circ-x)=\cos x}\frac{\lambda_۲}{۷۵}=\frac{\cos y}{\cos x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\lambda_۲=۵۶/۲۵\ \text{nm}$$

تست و پاسخ ۳۷

پرتو نوری مطابق شکل از هوا به یک تیغهٔ متوازی‌السطوح می‌تابد و پس از شکست در تیغه از نقطهٔ A وارد هوا می‌شود، به طوری که امتداد پرتو تابش اولیه در نقطهٔ A' به سطح پایینی تیغه برخورد می‌کند و $AA'=۲\,cm$ است. با افزایش ضخامت تیغه به ۱۲ سانتی‌متر، فاصلهٔ AA' چه‌قدر تغییر می‌کند؟



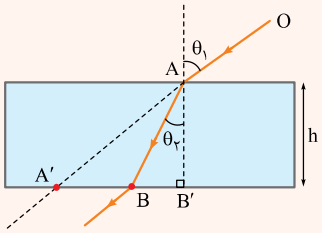
۱) ۱ سانتی‌متر افزایش می‌یابد.
۲) ۱ سانتی‌متر کاهش می‌یابد.
۳) ۳ سانتی‌متر افزایش می‌یابد.
۴) ۳ سانتی‌متر کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ضخامت تیغه را h فرض کنید و طول AA' را برحسب ضخامت تیغه به دست آورید و در نهایت تأثیر تغییرات افزایش h را بر روی AA' مورد بررسی قرار دهید.

درس نامه

شکل زیر، پرتو تابش در محیط (۱) و پرتو شکسته‌شده در محیط (۲) را که یک تیغهٔ شفاف است، نمایش می‌دهد. BA' فاصلهٔ بین پرتو شکسته‌شده و امتداد پرتو تابش OA را هنگام خروج از تیغه، نمایش می‌دهد.



$$\tan\theta_۱=\frac{A'B'}{h}\Rightarrow A'B'=h\tan\theta_۱$$

$$\tan\theta_۲=\frac{BB'}{h}\Rightarrow BB'=h\tan\theta_۲$$

$$BA'=h(\tan\theta_۱-\tan\theta_۲)$$

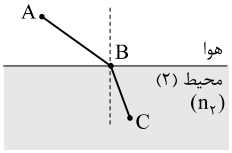
پاسخ تشریحی محیط تابش و شکست تغییر نکرده‌اند. زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ نیز تغییر نکرده‌اند؛ بنابراین فاصلهٔ AA'، با ضخامت تیغه متناسب است.

$$AA'\propto h\,(\text{ضخامت تیغه})\Rightarrow\frac{(AA')_۲}{(AA')_۱}=\frac{h_۲}{h_۱}\Rightarrow\frac{(AA')_۲}{۲}=\frac{۱۲}{۸}\Rightarrow AA'=۳\ \text{cm}$$

بنابراین فاصلهٔ AA' به اندازهٔ ۱ cm، افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۳۸

یک پرتوی نور، مسیر ABC را مطابق شکل زیر، از هوا تا درون محیط (۲) در مدت ۳۵۰ ns طی می‌کند. اگر $AB=۲BC=۶۰\ m$ باشد، ضریب شکست محیط (۲) کدام است؟ $(c=۳\times۱۰^۸\ m/s)$



۱) $\frac{۶}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره مدت‌زمانی را که نور مسیر AB را می‌پیماید، با استفاده از رابطهٔ $\Delta t=\frac{L}{v}$ به دست آورید. با توجه به این‌که کل زمان طی شده ۳۵۰ ns است، زمان طی‌شده در مسیر BC را به دست آورید و به کمک رابطهٔ $\Delta t=\frac{L}{v}$ در مسیر BC، تندی نور در این مسیر را حساب کنید و در نهایت به کمک رابطهٔ $n=\frac{c}{v}$، ضریب شکست محیط را به دست آورید.

درس‌نامه

نور در خلأ، بیشترین تندی را دارد که برابر $c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$ است و در بقیهٔ محیط‌های شفاف، این تندی کم‌تر از c است. به نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور در یک محیط شفاف، ضریب شکست آن محیط می‌گوییم که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n = \frac{c}{v} \leftarrow \text{ضریب شکست محیط}$$
$$c \rightarrow \text{تندی نور در خلأ}$$
$$v \rightarrow \text{تندی نور در محیط}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ $\Delta t = \frac{L}{v}$، مدت‌زمانی که پرتو نور مسیر AB را طی می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$\Delta t_{AB} = \frac{L_{AB}}{v_{AB}} \xrightarrow{v_{AB}=c=۳\times۱۰^{۸}\ m/s} \Delta t_{AB} = \frac{۶۰}{۳\times۱۰^{۸}} = ۲\times۱۰^{-۷}\ s = ۲۰۰\times۱۰^{-۹}\ s = ۲۰۰\ ns$$

گام دوم: کل مدت‌زمان پیمودن مسیر ABC توسط نور، $۳۵۰\ ns$ است. از آن‌جا که نور، مسیر AB را در مدت $۲۰۰\ ns$ طی کرده؛ پس مسیر BC را در مدت‌زمان $۱۵۰\ ns$ پیموده است. حال تندی نور در مسیر BC را به دست می‌آوریم:

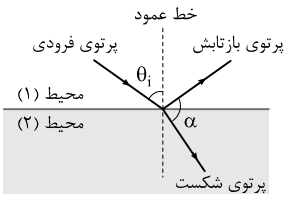
$$\Delta t_{BC} = \frac{L_{BC}}{v_{BC}} \Rightarrow ۱۵۰\times۱۰^{-۹} = \frac{۳۰}{v_{BC}} \Rightarrow v_{BC} = \frac{۳۰}{۱۵۰\times۱۰^{-۹}} = ۲\times۱۰^{۸}\ m/s$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ $n = \frac{c}{v}$، ضریب شکست محیط (۲) را به دست می‌آوریم:

$$n_{۲} = \frac{c}{v_{۲}} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲\times۱۰^{۸}} = \frac{۳}{۲}$$

تست و پاسخ ۳۹

در شکل مقابل که طرحی از بازتاب و شکست یک پرتوی نور را نشان می‌دهد، زاویهٔ تابش (θ_i) چگونه تغییر کند تا زاویهٔ بین پرتوی بازتابش و پرتوی شکست (α) 10° افزایش یابد؟



۱) کم‌تر از 5° کاهش یابد.

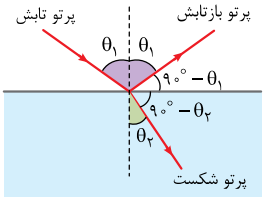
۲) بیشتر از 5° درجه کاهش یابد.

۳) کم‌تر از 5° درجه افزایش یابد.

۴) بیشتر از 5° درجه افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** در شکل مقابل، θ_1 زاویهٔ تابش و θ_2 زاویهٔ شکست را نشان می‌دهد.



$$\text{زاویهٔ بین پرتوی بازتابش و پرتوی شکست} = \alpha = 90^\circ - \theta_1 + 90^\circ - \theta_2 = 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$$

گام دوم: برای این‌که بتوانیم زاویهٔ بین پرتوی بازتابش و پرتوی شکست را 10° افزایش دهیم، باید مجموع زاویه‌های θ_1 و θ_2 را 10° کاهش دهیم (رد ۳ و ۴). به همین منظور، θ_1 را باید حداقل 5° کاهش دهیم تا مطمئن شویم که مجموع $\theta_2 + \theta_1$، 10° کاهش یافته و در نهایت α، 10° افزایش خواهد یافت.

تست و پاسخ ۴۰

چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) از آن‌جا که سراب وجود خارجی ندارد، نمی‌توان از آن عکس گرفت.

ب) با افزایش دمای هوا، ضریب شکست به تدریج افزایش می‌یابد.

پ) ضریب شکست هر محیطی به طول موج نور در آن محیط بستگی دارد.

ت) هنگام عبور نور سفید از منشور، نور بنفش کم‌ترین انحراف را دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

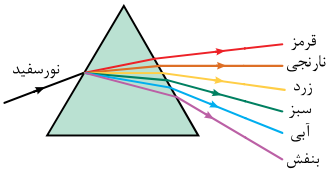
پاسخ تشریحی تک‌تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) نادرست؛ در متن کتاب درسی هم مطرح شده است که نه‌تنها می‌توان سراب را دید؛ بلکه می‌توان از آن عکس هم گرفت.

ب) نادرست؛ با افزایش دمای هوا، ضریب شکست کاهش یافته و تندی نور افزایش می‌یابد.

پ) نادرست؛ ضریب شکست محیط هیچ ربطی به طول موج نور در آن محیط ندارد.

ت) نادرست؛ طبق آن‌چه در شکل به تصویر کشیده شده است، باریکهٔ نور سفید پس از تابیده‌شدن به منشور شیشه‌ای به ۶ مؤلفهٔ رنگی خود پاشیده می‌شود که در بین آن‌ها، نور بنفش بیشترین انحراف را دارد.



t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۱ در آلیاژی از فلزهای روی و آهن، درصد جرمی فلز واکنش‌پذیرتر برابر با ۶۵٪ است. یک نمونهٔ ۴۰ گرمی از این آلیاژ فلزی با چند لیتر محلول هیدرویدیک اسید با $pH = ۱/۳$ به‌طور کامل واکنش داده و در محلول ایجاد شده، غلظت کاتیون روی چند برابر غلظت کاتیون آهن خواهد شد؟

$(Zn = ۶۵ \text{ و } Fe = ۵۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۳ ـ ۰/۸ ۲) ۲۶ ـ ۰/۸ ۳) ۱۳ ـ ۱/۶ ۴) ۲۶ ـ ۱/۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

همان‌طور که می‌دانیم، فلز روی نسبت به فلز آهن واکنش‌پذیری بیشتری دارد؛ بنابراین می‌توان گفت درصد جرمی فلز روی در نمونه ۴۰ گرمی آلیاژ برابر با ۶۵ درصد است. با توجه به توضیحات ذکرشده، جرم فلز روی به‌کار رفته در آلیاژ را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{درصد جرمی ماده} = \frac{\text{جرم ماده‌ی موردنظر در نمونه}}{\text{جرم نمونه}} \times ۱۰۰ \implies ۶۵ = \frac{\text{جرم فلز روی}}{۴۰} \times ۱۰۰ \implies \text{جرم فلز روی} = ۲۶\ g$$

بنابر محاسبات انجام‌شده، ۲۶ گرم فلز روی و ۱۴ گرم فلز آهن در نمونهٔ آلیاژ وجود دارد که با محلول هیدرویدیک‌اسید واکنش می‌دهند. معادلهٔ موازنه‌شده واکنش فلز روی و آهن با محلول هیدرویدیک‌اسید به‌صورت زیر است.

$$Zn(s) + ۲HI(aq) \longrightarrow ZnI_۲(aq) + H_۲(g)$$
$$Fe(s) + ۲HI(aq) \longrightarrow FeI_۲(aq) + H_۲(g)$$

قبل از محاسبهٔ حجم محلول هیدرویدیک‌اسید مصرف‌شده، مولاریتهٔ این محلول را تعیین می‌کنیم. pH محلول هیدرویدیک‌اسید برابر با ۱/۳ است، بنابراین غلظت یون هیدرونیوم در این محلول برابر است با:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۳} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

اکنون می‌توانیم مولاریتهٔ محلول هیدرویدیک‌اسید را حساب کنیم. هیدرویدیک اسید، اسیدی بسیار قوی بوده که درجه یونش آن در محلول برابر با ۱ است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = M \times \alpha \times n \Rightarrow M = \frac{[H^+]}{\alpha \times n} = \frac{۵ \times ۱۰^{-۲}}{۱ \times ۱} = ۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

در نهایت با استفاده از غلظت محلول هیدرویدیک‌اسید و معادلهٔ موازنه‌شده واکنش‌ها، حجم محلول هیدرویدیک‌اسید مصرف‌شده در واکنش با فلزهای روی و آهن را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,L\ HI = ۲۶\ g\ Zn \times \frac{۱\ mol\ Zn}{۶۵\ g\ Zn} \times \frac{۲\ mol\ HI}{۱\ mol\ Zn} \times \frac{۱\ L\ HI}{۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol\ HI} = ۱۶L$$
$$?\,L\ HI = ۱۴\ g\ Fe \times \frac{۱\ mol\ Fe}{۵۶\ g\ Fe} \times \frac{۲\ mol\ HI}{۱\ mol\ Fe} \times \frac{۱\ L\ HI}{۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol\ HI} = ۱۰L$$

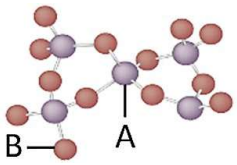
بنابراین در واکنش این آلیاژ با محلول هیدرویدیک‌اسید، ۲۶ لیتر از این محلول مصرف می‌شود. در قدم بعد، شمار مول‌های یون آهن و روی وارد شده به محلول آبی را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ Zn^{۲+} = ۲۶\ g\ Zn \times \frac{۱\ mol\ Zn}{۶۵\ g\ Zn} \times \frac{۱\ mol\ Zn^{۲+}}{۱\ mol\ Zn} = ۰/۴\ mol$$
$$?\,mol\ Fe^{۲+} = ۱۴\ g\ Fe \times \frac{۱\ mol\ Fe}{۵۶\ g\ Fe} \times \frac{۱\ mol\ Fe^{۲+}}{۱\ mol\ Fe} = ۰/۲۵\ mol$$
$$\frac{\text{شمار مول } Zn^{۲+}}{\text{شمار مول } Fe^{۲+}} = \frac{۰/۴\ mol}{۰/۲۵\ mol} = \text{برابر } ۱/۶$$

شمار مول‌های کاتیون روی وارد شده به محلول، ۱/۶ برابر شمار مول‌های کاتیون آهن وارد شده به محلول است، پس غلظت کاتیون روی ۱/۶ برابر غلظت کاتیون آهن می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۴۲ شکل روبه‌رو ساختار بخشی از بلور سیلیس را نمایش می‌دهد. چند مورد از عبارت‌های زیر در رابطه با این ماده درست است؟



آ: وجود این ماده باعث استحکام نقشکندها بر روی سازه‌های سنگی می‌شود.

ب: نوعی جامد کووالانسی بوده و فراوان‌ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین به‌شمار می‌رود.

پ: عنصر A در ساخت سلول خورشیدی کاربرد داشته و واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به کربن دارد.

ت: دو عنصر A و B، توانایی تشکیل یون تک‌اتمی نداشته و در ساختار سیلیس، پل‌های $A - B - A$ وجود دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

سیلیس (SiO_2)، جامدی کووالانسی بوده و نقطهٔ ذوب و جوش بالایی دارد. در شکل داده شده نیز اتم A معادل با اتم سیلیسیم و اتم B معادل با اتم اکسیژن است. با توجه به شکل، عبارت‌های (آ) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: سیلیس افزون بر خاک‌های رس، یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و نیز شن و ماسه است. وجود این ماده باعث استحکام و ماندگاری سازه‌های سنگی و نقشکندهای روی آن شده است.

ب: فراوانترین اکسید در پوسته زمین (نه کل زمین)، سیلیس بوده و این ماده جزء جامدهای کووالانسی به حساب می‌آید. در ساختار این ماده، همهٔ اتم‌ها توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند.

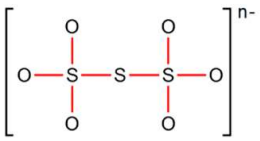
همان‌طور که گفتیم، سیلیسیم دی‌اکسید یا سیلیس (SiO_2) جزء جامدهای کووالانسی بوده و در ساختار آن حلقه‌های ۶ و ۱۲ ضلعی یافت می‌شود. در ساختار سیلیس، همهٔ اتم‌ها پیوند اشتراکی داده‌اند. سیلیس، شبکه‌ای گسترده از اتم‌های سیلیسیم و اکسیژن بوده و فاقد مولکول‌های مجزا و مستقل هستند؛ به‌طوری‌که در ساختار آن پل‌های متعددی از $Si-O-Si$ وجود دارد. نقطهٔ جوش سیلیس برخلاف جامدهای مولکولی زیاد است، چون برای ذوب آن باید پیوندهای اشتراکی بین اتم‌ها شکسته شود. توجه داریم که سیلیس، فراوان‌ترین اکسید در خاک رس و پوستهٔ جامد زمین بوده و باعث استحکام و ماندگاری سازه‌های سنگی و نقشکندهای روی آن‌ها می‌شود. کوارتز از جمله نمونه‌های خالص و ماسه از جمله نمونه‌های ناخالص سیلیس است.

پ: عنصر A، معادل با سیلیسیم بوده و اتم‌های این عنصر شبه‌فلزی در ساختار حلقه‌های موجود در ساختار سیلیس جای گرفته‌اند. سیلیسیم، یک مادهٔ نیمه رسانا بوده، عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی است و طی واکنش $SiO_2(s)+2C(s)\xrightarrow{3000^\circ C}Si(l)+2CO(g)$ به‌صورت مایع تولید می‌شود. با توجه به انجام‌پذیر بودن این واکنش، می‌توان گفت کربن واکنش‌پذیرتر از سیلیسیم است.

ت: سیلیسیم، عنصری شبه‌فلزی و اکسیژن، عنصری نافلزی است. اکسیژن می‌تواند یون تک‌اتمی اکسید را تشکیل بدهد که در ساختار بسیاری از ترکیب‌های یونی مثل سدیم اکسید، آلومینیم اکسید و... یافت می‌شود اما سیلیسیم توانایی تشکیل یون تک‌اتمی را ندارد. توجه داریم که در ساختار سیلیس، پل‌های متعدد $Si-O-Si$ وجود دارد.

www.biomaze.ir

۴۳ **ساختار مقابل، مربوط به آنیونی است که تمام اتم‌های آن به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند:**



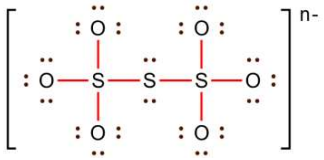
در ۰/۵ مول از ترکیب این آنیون با کاتیونی از آهن که در ساختار خود ۶ الکترون با $l=2$ دارد، مجموعاً چند اتم گوگرد یافت می‌شود؟

۱) $1/204\times10^{24}$
۲) $1/806\times10^{24}$
۳) $6/02\times10^{23}$
۴) $9/03\times10^{23}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

ساختار داده شده مربوط به یک آنیون چند اتمی بوده که تمام اتم‌های آن به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند. شکل زیر آرایش الکترون-نقطه‌ای (ساختار لوویس) کامل این آنیون را نمایش می‌دهد:



برای تعیین بار یک یون چند اتمی، کافی است تعداد الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی موجود در ساختار آن یون را از تعداد الکترون‌های ظرفیت اتم‌های موجود در ساختار آن یون کم کنیم. بر این اساس، داریم:

بار یون چند اتمی = (مجموع شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی موجود در ساختار) − (مجموع شمار الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌ها)

اکسیژن و گوگرد دو عنصر از گروه ۱۶ جدول دوره‌ای بوده و هر یک از آن‌ها در ساختار خود دارای ۶ الکترون ظرفیتی هستند. بر این اساس، بار یون چند اتمی مورد نظر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

بار یون چند اتمی $=(54)-(56)=-2$

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پس فرمول آنیون مورد نظر به‌صورت $S_2O_6^{2-}$ است. کاتیون Fe^{2+}، تعداد ۶ الکترون با $l = 2$ در زیرلایه $3d$ خود دارد. در ساختار کاتیون Fe^{3+} نیز ۵ الکترون با $l = 2$ در زیرلایه $3d$ وجود دارد. فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از واکنش میان یون Fe^{2+} با یون $S_2O_6^{2-}$، به‌صورت FeS_2O_6 خواهد بود. در ساختار نیم مول از این ترکیب، ۱/۵ مول اتم گوگرد که معادل با تعداد $9/03 \times 10^{23}$ اتم گوگرد است، وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

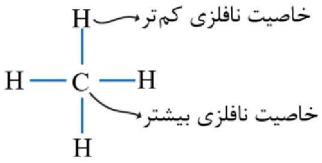
۴۴ **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟**

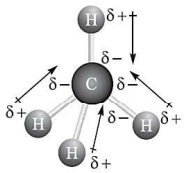
۱) سیلیسیم کربید، نسبت به یک نمونه یخ خشک، درجه سختی بالاتری داشته و سخت‌تر به حالت گاز در می‌آید.
۲) در مولکول‌های کربونیل سولفید و کلروفرم، به‌ترتیب به اتم‌های O و Cl می‌توان بار جزئی منفی (δ^-) نسبت داد.
۳) هر مولکول چندا‌تمی که اتم مرکزی آن بار جزئی منفی دارد، در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کند.
۴) آمونیاک از جمله مواد قطبی بوده و در نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی آن، اتمی با شعاع بزرگ‌تر با رنگ قرمز مشخص می‌شود.

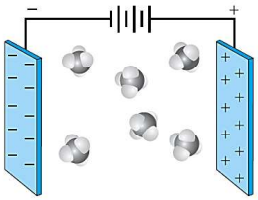
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

تنها مولکول‌های قطبی در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند و این قضیه کاملاً مستقل از نوع بار جزئی اتم مرکزی در مولکول‌ها است. برای مثال، متان مولکولی است با بار جزئی منفی بر روی اتم مرکزی که ناقطبی بوده و در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کند. تصویر زیر، نمایی از ساختار مولکول متان را نشان می‌دهد:







در نقطهٔ مقابل، کربن‌دی‌اکسید مولکولی است با بار جزئی مثبت بر روی اتم مرکزی که ناقطبی بوده و در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سیلیسیم کربید با فرمول شیمیایی SiC، یک ساینده ارزان قیمت است که همانند الماس، گرافیت، سیلیسیم و سیلیس، در دستهٔ جامدهای کووالانسی قرار می‌گیرد. سیلیسیم کربید، ساختاری مشابه الماس و سیلیسیم دارد و از آن در تهیهٔ سمباده استفاده می‌شود. در ساختار این ماده، هر اتم کربن به ۴ اتم سیلیسیم و هر اتم سیلیسیم نیز به ۴ اتم کربن متصل شده است. کربن‌دی‌اکسید نیز یک مادهٔ مولکولی است که در حالت جامد، با نام یخ خشک شناخته می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، درجهٔ سختی و دمای ذوب جامدهای کووالانسی بیشتر از مواد مولکولی است.

۲) با توجه به نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی مولکول‌های کربونیل سولفید (SCO) و کلروفرم $(CHCl_3)$، به‌ترتیب به اتم‌های O و Cl در این مولکول‌ها می‌توان بار جزئی منفی نسبت داد. نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی این مواد به‌صورت زیر است:

۴) نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی آمونیاک به‌صورت زیر است:

با توجه به نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی، آمونیاک گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر دارد. همان‌طور که در این نقشه مشخص است، اتم نیتروژن که نسبت به اتم‌های هیدروژن شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد، با رنگ قرمز مشخص شده است.

گروه آموزشی ماز

۴۵ **کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟**

آ: بزرگ‌ترین منبع انرژی برای زمین، انرژی خود را به کمک پرتوهای الکترومغناطیسی به‌سمت زمین گسیل می‌کند.
ب: مقدار عدد اکسایش سیلیسیم در سدیم سیلیکات، برابر با قدر مطلق عدد اکسایش کربن در مولکول متان است.
پ: در نیروگاه‌های خورشیدی، انرژی پرتوهای نورانی موجب افزایش دما و در نهایت، تبخیر یک ماده مذاب می‌شوند.
ت: عدد کوئوردیناسیون هر یک از یون های Na^+ و Cl^- موجود در بلور سدیم کلرید با هم مساوی و برابر با ۸ است.

۱) آ و ب ۲) ب و پ ۳) پ و ت ۴) آ و ت

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

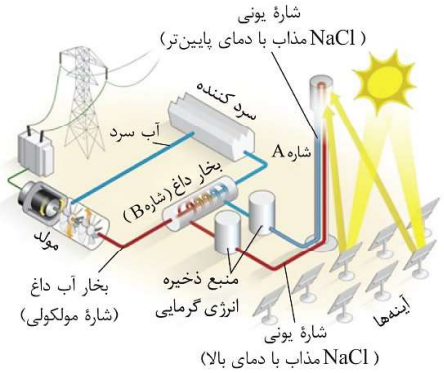
عبارت‌های (آ) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: خورشید، بزرگ‌ترین منبع انرژی برای زمین است. این ستاره انرژی خود را در قالب پرتوهای الکترومغناطیسی به سمت ما (زمین) گسیل می‌کند که از آن می‌توان به‌عنوان یک منبع انرژی تجدیدپذیر استفاده کرد. از آن‌جا که بهره‌گیری بیشتر از این انرژی پاک موجب کاهش ردپای زیست‌محیطی می‌شود، دانشمندان به دنبال فناوری‌هایی هستند که بتوانند بخشی از این انرژی خدادادی و رایگان را ذخیره کرده و به شکل انرژی الکتریکی وارد چرخهٔ مصرف کنند. تبدیل پرتوهای خورشیدی به انرژی الکتریکی، فرایند آسانی نبوده و به دانش و فناوری پیشرفته نیاز دارد و به‌همین خاطر است که فقط در برخی از کشورهای توسعه‌یافته انجام می‌شود.

ب: در ساختار سدیم سیلیکات (Na_4SiO_4)، یون چند اتمی سیلیکات وجود دارد. یون سیلیکات با فرمول شیمیایی SiO_4^{4-}، یک یون چند اتمی است که در ساختار آن ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد. عدد اکسایش اتم‌های سیلیسیم در کلسیم سیلیکات (Ca_2SiO_4) برابر با $+4$ بوده و عدد اکسایش کربن در مولکول متان نیز برابر با -4 است.

پ: تصویر زیر، شمایی از فناوری پیشرفتهٔ مورد نیاز برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی در نیروگاه‌های خورشیدی را نشان می‌دهد:



در این نیروگاه‌ها، پرتوهای خورشیدی پس از بازتاب از سطح آینه‌ها، در بالاترین نقطه برج متمرکز شده و انرژی خود را به شارهٔ یونی (سدیم کلرید مذاب) که در حال عبورکردن از این قسمت است، منتقل می‌کنند و موجب افزایش دمای این ماده می‌شوند. توجه داریم که طی این فرایند، دمای سدیم کلرید مذاب افزایش پیدا می‌کند اما چون دمای نهایی آن کمتر از دمای جوش این ماده است، مادهٔ مورد نظر تبخیر نمی‌شود. برخلاف سدیم کلرید (شاره یونی)، شارهٔ مولکولی استفاده شده در نیروگاه‌های خورشیدی دچار تغییر حالت فیزیکی می‌شود.

ت: آرایش یون‌ها در سرتاسر شبکه بلوری سدیم کلرید، همانند سایر جامدهای یونی، از یک الگوی تکراری و به‌هم‌پیوسته پیروی می‌کند؛ به‌طوری‌که هر کاتیون با شمار معینی از آنیون‌ها و هر آنیون با شمار معینی از کاتیون‌ها احاطه شده است. به‌شمار نزدیک‌ترین یون‌های ناهم‌نام موجود در اطراف هر یون در شبکه بلوری هر ترکیب یونی، عدد کوئوردیناسیون می‌گویند. عدد کوئوردیناسیون در بلور سدیم کلرید برای هر یک از یون‌های Na^+ و Cl^- برابر با یکدیگر و معادل با ۶ است.

گروه آموزشی ماز

۴۶ **در تولید برق از انرژی خورشیدی، از شارهٔ ..... که در گسترهٔ دمایی ..... به حالت مایع است، برای ذخیرهٔ انرژی گرمایی و از شارهٔ ..... با نیروهای جاذبه میان ذره‌ای .....، برای به حرکت درآوردن مولد الکتریکی استفاده می‌شود.**

۱) مولکولی ـ بزرگ‌تری ـ یونی ـ ضعیف‌تر
۲) مولکولی ـ کوچک‌تری ـ یونی ـ قوی‌تر
۳) یونی ـ بزرگ‌تری ـ مولکولی ـ ضعیف‌تر
۴) یونی ـ کوچک‌تری ـ مولکولی ـ قوی‌تر

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

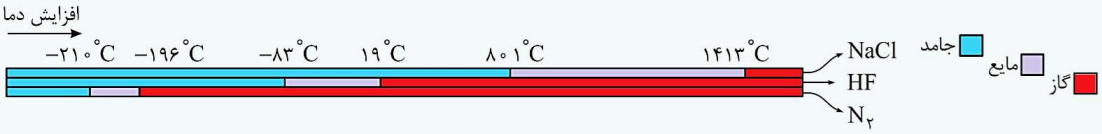
هر چه تفاوت بین نقطهٔ ذوب و نقطهٔ جوش یک مادهٔ خالص بیشتر باشد، آن ماده در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع است. در نتیجه آن ماده در حالت مایع شارهٔ بهتری برای ذخیرهٔ انرژی گرمایی در نیروگاه تولید برق از انرژی خورشیدی است. از آن‌جا که نیروهای جاذبه میان ذره‌های سازندهٔ شارهٔ یونی از شارهٔ مولکولی قوی‌تر است، شارهٔ یونی در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع بوده و گزینهٔ مناسب‌تری نسبت به شارهٔ مولکولی به‌شمار می‌رود. از طرفی، برای به حرکت درآوردن مولد الکتریکی (توربین) در این نیروگاه‌ها از بخار آب (شارهٔ مولکولی) استفاده می‌شود.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

هر مادهٔ خالص، در دماهای بالاتر از نقطهٔ جوش خود به حالت گاز، در بازهٔ دمایی بین نقطهٔ ذوب و جوش خود به حالت مایع و در دماهای پایین‌تر از نقطهٔ ذوب خود به حالت جامد وجود دارد. در این رابطه، داریم:

بر این اساس، هر چه تفاوت نقطهٔ ذوب و جوش یک ماده بیشتر باشد، آن ماده در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع است. به‌طورکلی، هر چه تفاوت نقطهٔ ذوب و جوش یک مادهٔ خالص بیشتر باشد، نیروهای جاذبهٔ میان ذره‌های سازندهٔ آن ماده قوی‌تر است. برای مثال، HF و نیتروژن جزء ترکیب‌های مولکولی هستند و سدیم‌کلرید نیز یک ترکیب یونی است؛ پس با توجه به بیشتربودن تفاوت نقطهٔ ذوب و جوش سدیم‌کلرید نسبت به دو ترکیب دیگر، می‌توان گفت نیروی جاذبهٔ میان آنیون‌ها و کاتیون‌ها در ترکیب‌های یونی، قوی‌تر از نیروی جاذبهٔ وان‌دروالسی و یا پیوند هیدروژنی میان ذرات سازندهٔ ترکیب‌های مولکولی است. تصویر زیر حالت‌های فیزیکی سه مادهٔ N_2، HF و $NaCl$ را در دماهای مختلف نشان می‌دهد:



در مراحل تولید انرژی الکتریکی با استفاده از نور خورشید، پرتوهای خورشیدی پس از بازتاب از سطح آینه‌ها در بالاترین نقطهٔ برج متمرکز شده و انرژی خود را به شارهٔ یونی که در حال عبورکردن از این قسمت است، منتقل می‌کنند و موجب افزایش دمای این ماده می‌شوند. شارهٔ یونی پس از افزایش دما به سمت منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی جریان پیدا کرده و در این مخزن باقی می‌ماند. در هنگام نیاز به انرژی الکتریکی، شارهٔ یونی از منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی به طرف مخزن انتقال حرارت جاری شده و بخشی از انرژی خود را به شارهٔ مولکولی (آب) می‌دهد و آن را به بخار تبدیل می‌کند. پس از انتقال حرارت، دمای شارهٔ یونی کاهش پیدا کرده و مجدداً به سمت یک مخزن ذخیره‌کننده حرکت می‌کند و از آن‌جا دوباره به سمت برج گیرنده می‌رود. در واقع وظیفهٔ شارهٔ یونی رساندن حرارت خورشید به شارهٔ مولکولی است. بخار آب تولیدشده در مخزن انتقال حرارت، به سمت یک توربین حرکت کرده و با چرخاندن آن سبب تولید انرژی الکتریکی می‌شود. پس از به حرکت درآوردن توربین، بخار آب به سمت سردکننده جاری می‌شود تا دوباره در چرخه تولید بخار قرار بگیرد.

گروه آموزشی ماز

۴۷ **مخلوطی از ۲-هپتن و گاز هیدروژن، به‌طور کامل با یکدیگر واکنش داده و مقداری از یک هیدروکربن سیرشده را ایجاد می‌کنند. در این شرایط، درصد جرمی گاز هیدروژن در مخلوط اولیه برابر با چند درصد بوده و در هر مولکول از هیدروکربن تولید شده، چند پیوند اشتراکی وجود دارد؟**

$(C = ۱۲ \text{ و } H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲ - ۲۲ ۲) ۴ - ۲۱ ۳) ۲ - ۲۱ ۴) ۴ - ۲۲

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

هر مول از ترکیب‌های آلکنی مختلف، با یک مول گاز هیدروژن واکنش داده و به ترکیب سیرشده تبدیل می‌شوند. واکنش میان ۲-هپتن (ششمین عضو از خانواده‌ی آلکن‌ها) و گاز هیدروژن به‌صورت زیر است:

$$C_۷H_{۱۴} + H_۲ \rightarrow C_۷H_{۱۶}$$

بر اساس این واکنش، یک مول ۲-هپتن (۹۸ گرم ۲-هپتن) با ۱ مول گاز هیدروژن (۲ گرم گاز هیدروژن) با یکدیگر واکنش داده و یک مول هپتان (۱۰۰ گرم هپتان) تولید می‌شود؛ پس می‌توان گفت در مخلوط ۲-هپتن و گاز هیدروژن اولیه، به‌ازای هر ۹۸ گرم ۲-هپتن، ۲ گرم گاز هیدروژن وجود داشته است. بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد جرمی هیدروژن} = \frac{\text{جرم هیدروژن}}{\text{جرم مخلوط}} \times ۱۰۰ = \frac{۲}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = ۲$$

بر این اساس، درصد جرمی هیدروژن در مخلوط اولیه برابر با ۲٪ است. برای محاسبهٔ تعداد پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار مولکول هپتان، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{\text{تعداد اتم هیدروژن} \times ۱ + \text{تعداد اتم کربن} \times ۴}{۲} = \frac{۱۶ + ۷ \times ۴}{۲} = ۲۲$$

گروه آموزشی ماز

۴۸ **مقداری اتیلن‌گلیکول را به‌طور کامل سوزانده و فراورده‌های حاصل از این فرایند را وارد یک میدان الکتریکی می‌کنیم. درصد جرمی مولکول‌هایی از این مخلوط که در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند، تقریباً چقدر است؟**

$(O = ۱۶ \text{ و } C = ۱۲ \text{ و } H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۳۸ ۴) ۷۲

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

ساختار مولکول‌های اتیلن گلیکول به‌صورت زیر است:

$$HO-CH_2-CH_2-OH$$

واکنش سوختن اتیلن گلیکول به‌صورت زیر است:

$$2C_2H_6O_2(l) + 5O_2(g) \rightarrow 4CO_2(g) + 6H_2O(g)$$

با توجه به معادلهٔ این واکنش شیمیایی، از سوختن ۲ مول اتیلن گلیکول، ۴ مول کربن‌دی‌اکسید (معادل با ۱۷۶ گرم کربن‌دی‌اکسید) و ۶ مول بخار آب (معادل با ۱۰۸ گرم بخار آب) تولید می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، بخار آب از مولکول‌های قطبی و کربن‌دی‌اکسید نیز از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده است. بر این اساس، درصد جرمی مولکول‌هایی که در میان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند (مولکول‌هایی با گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر) را در مخلوط فراورده‌ها محاسبه می‌کنیم.

$$\text{درصد جرمی مولکول‌هایی که جهت‌گیری می‌کنند} = \frac{\text{جرم آب تولید شده}}{\text{جرم کل فراورده‌ها}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۸}{۱۰۸ + ۱۷۶} \times ۱۰۰ \simeq ۳۸ \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز

۴۹ **با توجه به معادلهٔ موازنه نشدهٔ زیر، کدام عبارت نادرست است؟**

$$VO_2^+(aq) + Zn(s) + H^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + VO^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

۱) در این معادلهٔ شیمیایی، یون VO_2^+ در نقش اکسنده بوده و فلز روی نقش کاهنده دارد.
۲) با انجام این واکنش، عدد اکسایش وانادیم یک واحد کاهش یافته و رنگ محلول از زرد به آبی تغییر می‌کند.
۳) انجام این واکنش با افزایش pH محیط همراه بوده و در محلول اولیه، وانادیم تنها می‌تواند نقش اکسنده را داشته باشد.
۴) به‌ازای مصرف ۰/۴ مول یون هیدرونیوم در این واکنش، ۰/۱ مول الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مساله و مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

طی این واکنش شیمیایی، عدد اکسایش اتم V از ۵ + در VO_2^+ به ۴ + در VO^{2+} رسیده است، بنابراین به دو گونهٔ VO_2^+ و VO^{2+} ضریب ۲ و به گونه‌های Zn و Zn^{2+} ضریب یک می‌دهیم و در نهایت ضرایب استوکیومتری H^+ و H_2O را تعیین می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$2VO_2^+(aq) + Zn(s) + 4H^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2VO^{2+}(aq) + 2H_2O(l)$$

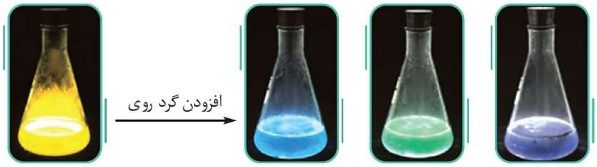
در این واکنش، به‌ازای مصرف ۴ مول یون هیدروژن، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود. حالا حساب می‌کنیم به‌ازای مصرف ۰/۴ مول یون H^+ چند مول الکترون مبادله می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\,e^- = ۰/۴\,mol\,H^+ \times \frac{۲\,mol\,e^-}{۴\,mol\,H^+} = ۰/۲\,mol\,e^-$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در این واکنش عدد اکسایش وانادیم یک واحد کاهش یافته و در طرف مقابل، عدد اکسایش فلز روی دو واحد افزایش می‌یابد. بنابراین یون چنداتمی VO_2^+ نقش اکسنده و فلز روی نقش کاهنده دارند.

۲) اتم وانادیم با اعداد اکسایش متفاوت، رنگ‌های مختلفی را در محلول‌های آبی خود ایجاد می‌کند. رنگ محلول اولیه (محلول نمک وانادیم(V))، زرد و رنگ محلول نهایی (محلول نمک وانادیم(IV)) آبی است. در رابطه با رنگ محلول‌های وانادیم، داریم:



محلولی از نمک وانادیم (V) (زرد) | محلولی از نمک وانادیم (IV) (آبی) | محلولی از نمک وانادیم (III) (سبز) | محلولی از نمک وانادیم (II) (بنفش)

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۳ حداکثر عدد اکسایش وانادیم که عنصری از گروه پنجم جدول تناوبی است، برابر با ۵+ است. بنابراین وانادیم در VO_4^+ به بزرگ‌ترین عدد اکسایش خود رسیده است و در نتیجه تنها می‌تواند نقش اکسنده را در واکنش‌های اکسایش-کاهش داشته باشد. توجه داریم که عدد اکسایش اتم‌های هر عنصر، در یک دامنهٔ خاص تغییر می‌کند. جدول زیر، دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عناصر موجود در برخی از گروه‌های جدول تناوبی را نشان می‌دهد:

شمارهٔ گروه	۱	۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	عناصر واسطه مهم				
							آهن	منگنز	مس	وانادیم	نقره
کم‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۰	۰	۰	۰
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۴	+۵	+۶	+۷	+۳	+۷	+۲	+۵	+۱

پاسخ تشریحی:

براساس داده‌های موجود در این جدول، گونه‌های شیمیایی در بالاترین حالت اکسایش خود، فقط می‌توانند گیرندهٔ الکترون باشند و دیگر توانایی از دست دادن الکترون را نخواهند داشت؛ بنابراین در بالاترین حالت اکسایش خود همیشه اکسنده هستند. در نقطهٔ مقابل، گونه‌های شیمیایی در پایین‌ترین حالت اکسایش خود، فقط می‌توانند دهندهٔ الکترون باشند و دیگر توانایی جذب الکترون را ندارند؛ بنابراین در پایین‌ترین حالت اکسایش خود همیشه کاهنده هستند.

۵۰ **چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟**

آ: برای توصیف سدیم کلرید، برخلاف عناصر سازندهٔ این ماده، نمی‌توان از عبارت (نیروهای بین مولکولی) استفاده کرد.

ب: نیروی جاذبهٔ بین ذرات سازنده ماده‌ای که در حالت جامد نارسانا و در حالت مذاب رسانا است، از نوع یونی می‌باشد.

پ: مقدار ΔH واکنش $LiCl(l) \rightarrow Li^+(g) + Cl^-(g)$، کمتر از ΔH واکنش فروپاشی شبکه بلور لیتیم کلرید است.

ت: سدیم سولفید، یک ترکیب یونی دوتایی بوده و دمای ذوب یک نمونه از آن نسبت به منیزیم کلرید پایین‌تر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

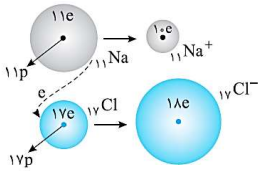
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: هرگاه اتم‌های یک عنصر فلزی مثل سدیم در مجاورت با اتم‌های یک عنصر نافلزی مثل کلر قرار بگیرند، اتم‌های فلزی اکسایش پیدا می‌کنند و الکترون‌های خود را به اتم‌های نافلزی منتقل می‌کنند. طی این فرایند اتم‌ها با یکدیگر الکترون دادوستد می‌کنند و به یون‌هایی با بار مخالف تبدیل می‌شوند و در نتیجهٔ آن یک ترکیب یونی تولید می‌شود. واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



نیم‌واکنش اکسایش: $Na(s) \rightarrow Na^+(s) + e^-$ $\quad {}_{11}Na : [{}_{10}Ne]3s^1 \Rightarrow {}_{11}Na^+ : [{}_{10}Ne]$

نیم‌واکنش کاهش: $Cl_2(g) + 2e^- \rightarrow 2Cl^-(s)$ $\quad {}_{17}Cl : [{}_{10}Ne]3s^2 3p^5 \Rightarrow {}_{17}Cl^- : [{}_{18}Ar]$

همان‌طور که مشخص است، سدیم کلرید از واکنش میان فلز سدیم و گاز کلر تولید می‌شود. عنصر سدیم، نوعی عنصر فلزی بوده و یک مادهٔ مولکولی نیست و به‌همین خاطر، نمی‌توان از واژه‌هایی مانند نیروی بین مولکولی و مولکول برای توصیف آن استفاده کرد. در نقطهٔ مقابل، برای توصیف گاز کلر می‌توان از واژه‌هایی مانند نیروی بین مولکولی و مولکول برای توصیف آن استفاده کرد.

ب: ترکیب‌های یونی در حالت جامد نارسانا هستند؛ اما در حالت مذاب، به‌علت امکان حرکت ذرات باردار، رسانای جریان الکتریکی به‌شمار می‌روند. همان‌طور که می‌دانید، نیروی جاذبهٔ میان ذره‌های سازندهٔ این ترکیب‌ها، از نوع پیوند یونی است.

از آن‌جا که مجموع بار الکتریکی کاتیون‌ها و آنیون‌های موجود در هر ترکیب یونی باهم برابر است، ترکیبات یونی از لحاظ بار الکتریکی خنثی هستند. توجه داریم که ترکیب‌های یونی در حالت جامد رسانای جریان الکتریسیته نیستند اما با ذوب‌کردن این مواد یا انحلال آن‌ها در یک نمونه از آب، یک محلول الکترولیت به‌دست می‌آید که جریان برق را از خود عبور می‌دهد.

پ: به انرژی لازم برای فروپاشی شبکهٔ بلوری یک مول جامد یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا، آنتالپی فروپاشی شبکه گفته می‌شود. آنتالپی فروپاشی شبکه جامدهای یونی را در مقیاس کیلوژول بر مول گزارش می‌کنند.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

به‌عنوان مثال، معادله زیر، واکنش فروپاشی شبکه بلور لیتیم کلرید جامد را نشان می‌دهد:

$$\underbrace{LiCl(s)}_{\text{جامد یونی}} \rightarrow \overbrace{Li^+(g)+Cl^-(g)}^{\text{یون‌های گازی مجزا}} \;;\; \Delta H_{\text{فروپاشی}} = +x\ kJ.mol^{-1}$$

در این واکنش، یک ترکیب یونی جامد به یون‌های گازی تبدیل شده است، درحالی‌که در واکنش $LiCl(l) \rightarrow Li^+(g)+Cl^-(g)$، همان ترکیب یونی مقداری انرژی گرفته و از حالت مذاب به یون‌های گازی تبدیل شده است. چون سطح انرژی مواد در حالت مذاب بیشتر از حالت جامد است، پس می‌توان گفت مقدار انرژی مصرف شده در واکنش دوم کمتر از واکنش اول خواهد بود.

ت: برای مقایسه آنتالپی شبکه ترکیبات یونی مختلف، به‌ترتیب از مقیاس‌های زیر استفاده می‌کنیم:

- ✓ مقایسه مجموع قدرمطلق بار الکتریکی آنیون و کاتیون سازنده ترکیب مورد نظر ← هر ترکیبی که مجموع قدرمطلق بار الکتریکی آنیون و کاتیون سازنده آن بزرگ‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بالاتری دارد.
- ✓ در صورت یکسان بودن مجموع قدرمطلق بار الکتریکی یون‌ها، مقایسه شعاع آنیون و کاتیون سازنده ← هر ترکیبی که شعاع یون‌های سازنده آن کوچک‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بالاتری دارد.

سدیم سولفید (Na_2S)، یک ترکیب یونی دوتایی به‌شمار می‌رود که از یون‌های Na^+ و S^{2-} تشکیل شده است. هرچه آنتالپی فروپاشی شبکه یک ترکیب یونی بیشتر باشد، این ترکیب در دماهای بالاتری ذوب می‌شود. مجموع قدرمطلق بار کاتیون و آنیون سدیم سولفید (Na_2S) و منیزیم کلرید ($MgCl_2$) با هم برابر است اما منیزیم کلرید به علت کمتر بودن شعاع یون‌های سازنده‌اش، نسبت به سدیم سولفید آنتالپی فروپاشی بیشتری دارد و بنابراین در دماهای بالاتری ذوب می‌شود. مقایسه شعاع یون‌های سازنده این دو ترکیب به‌صورت زیر است:

شعاع آنیون‌ها : $Cl^- < S^{2-}$ و شعاع کاتیون‌ها : $Mg^{2+} < Na^+$

گروه آموزشی ماز

۵۱ **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟**

۱) نیمی از عناصر موجود در گروه چهاردهم جدول دوره‌ای امروزی، در حالت خالص از مدل دریای الکترونی پیروی می‌کنند.
۲) به‌جز عناصر دستهٔ d، برخی از سایر فلزها نیز هنگام تبدیل به یون پایدار خود، به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسند.
۳) تیتانیم در مقایسه با فولاد چگالی بیشتری داشته و یک نمونه از این فلز، در مقابل خوردگی مقاومت بالایی دارد.
۴) تنوع عدد اکسایش، جزء رفتارهای شیمیایی عناصر فلزی و رسانایی الکتریکی، جزء رفتارهای فیزیکی آن‌ها است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

فلزها افزون بر رفتارهای مشابه، تفاوت‌های آشکاری در برخی رفتارها نشان می‌دهند. در واقع، هر فلز افزون بر رفتارهای مشترک با سایر عناصر فلزی، رفتارهای ویژهٔ خود را نیز دارد. مثلا فلزهای دستهٔ d (فلزهای واسطه)، همانند سایر فلزها رسانایی الکتریکی بالا، رسانایی گرمایی بالا و شکل‌پذیری دارند، اما در ویژگی‌هایی مانند سختی، نقطهٔ ذوب و تنوع اعداد اکسایش با آن‌ها تفاوت دارند. تیتانیم، دومین فلز واسطهٔ موجود در تناوب چهارم است که به‌خاطر ویژگی‌های باورنکردنی و فراتر از انتظار مثل ماندگاری و استحکام مناسب، از آن در جاهای مختلفی مثل ساخت موتور جت، پروانهٔ کشتی‌های اقیانوس‌پیما و نمای زیبای ساختمان‌ها استفاده می‌شود. ویژگی‌های تیتانیم در مقایسه با فولاد به شرح جدول زیر است: آزمون وی ای پی

ویژگی / ماده	تیتانیم	مقایسه	فولاد
نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	۱۶۶۷	<	۱۵۳۵
چگالی ($g.mL^{-1}$)	۴/۵۱	>	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	>	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	<	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	≈	عالی

از تیتانیم برای ساختن قطعات موتور جت استفاده می‌شود. هنگامی که موتور جت کار می‌کند، همهٔ اجزای سازندهٔ آن (اجزای ثابت و متحرک) دمای بالایی پیدا می‌کنند؛ پس برای ساختن این قطعات باید از فلزی استفاده کرد که دمای ذوب بالایی داشته باشد. از طرفی، این قطعات باید از جنس فلزی ساخته شوند که مقاومت بالایی در برابر خوردگی داشته باشد و تا حد امکان چگالی آن نیز کم‌تر باشد. با توجه به برتری فلز تیتانیم نسبت به فولاد در همه این زمینه‌ها، استفاده از این فلز برای ساختن موتور جت منطقی‌تر از فولاد است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

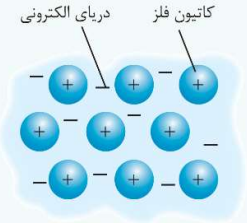
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گروه ۱۴ جدول دوره‌ای شامل ۶ عنصر مختلف شده و ۳ عنصر اول موجود در آن، نافلز و یا شبه‌فلز هستند. بر این اساس، می‌توان گفت از میان عناصر موجود در گروه چهاردهم جدول دوره‌ای، عناصر قلع، سرب و فلرویم فلز بوده و از مدل دریای الکترونی پیروی می‌کنند.

۲) به‌جز تعدادی از فلزهای واسطهٔ موجود در جدول دوره‌ای، برخی از فلزهای اصلی مثل گالیم، قلع، سرب و ...، هنگام تبدیل شدن به یون پایدار خود، به آرایش الکترونی یک گاز نجیب نمی‌رسند. به‌عنوان مثال، یون $_{31}Ga^{3+}$ از اتم خنثی گالیم حاصل شده و به آرایش الکترونی هیچ گاز نجیبی نرسیده‌است. در ساختار این یون، ۲۸ الکترون وجود دارد.

۴) فلزها در هر چهار دستهٔ s، p، d و f از جدول تناوبی جای داشته اما رفتارهای فیزیکی و شیمیایی متنوعی دارند. داشتن جلا، رسانایی الکتریکی، رسانایی گرمایی، دمای ذوب، قابلیت چکش‌خواری و شکل‌پذیری، از جمله رفتارهای فیزیکی فلزها بوده درحالی‌که واکنش‌پذیری (خصلت فلزی) و تنوع اعداد اکسایش، از جمله رفتارهای شیمیایی آن‌ها است.

مواد از جمله فلزها همواره برای زندگی انسان و ادامهٔ آن ضروری و ارزشمند بوده‌اند؛ تا آن‌جا که تمدن‌های آغازی نیز براساس گسترهٔ کاربری این مواد به‌صورت دورهٔ سنگی، دورهٔ برنز (آلیاژی از قلع و مس) و دورهٔ آهن نام‌گذاری شده‌اند. فلزها همواره نقش مهمی در رشد، گسترش و ارتقای کیفیت زندگی داشته و بسیاری باور دارند که پایداری جامعهٔ پیشرفته با فناوری کارآمد به گستردگی استفاده از فلزات بستگی دارد. تصویر زیر، یک الگوی ساده از شبکهٔ بلوری فلزها را نشان می‌دهد که برای توجیه برخی از رفتارهای فیزیکی این عناصر ارائه شده و به مدل دریای الکترونی معروف است:



براساس این مدل، ساختار فلزها آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها، الکترون‌های ظرفیتی آزادانه جابه‌جا می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

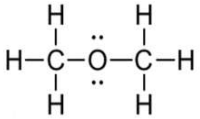
۵۲- شمار پیوندهای کربن- هیدروژن موجود در ساختار مولکول دی‌متیل‌اتر، با شمار پیوندهای کربن-کربن یگانهٔ موجود در ساختار کدام ترکیب زیر برابر است؟

۱) ۳-هپتن ۲) ۳-اتیل هگزان ۳) ۲-اوکتین ۴) ۲-متیل پنتان

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

ساختار مولکول دی‌متیل‌اتر به‌صورت زیر است:



در ساختار مولکولی این ماده، ۶ پیوند کربن-هیدروژن وجود دارد. ۲-اوکتین نیز نوعی آلکین است که در ساختار خود دارای ۸ کربن بوده و هر مولکول از این ماده شامل ۶ پیوند کربن-کربن یگانه به‌همراه یک پیوند کربن-کربن سه‌گانه می‌شود. در ساختار ۳-هپتن، ۳-اتیل هگزان و ۲-متیل پنتان، به‌ترتیب ۵، ۷ و ۵ پیوند اشتراکی کربن-کربن یگانه یافت می‌شود.

پروپان و دی‌متیل‌اتر، به‌ترتیب دو ترکیب ناقطبی و قطبی هستند و جرم مولی نزدیک به‌هم دارند، بنابراین نقطهٔ جوش دی‌متیل اتر بالاتر است؛ درنتیجه گاز دی‌متیل‌اتر آسان‌تر از گاز پروپان به مایع تبدیل می‌شود. توجه داریم که پروپان نوعی هیدروکربن است. این مواد از اتصال اتم‌های هیدروژن و کربن به‌وجود می‌آیند. توزیع الکترون‌ها در نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی اغلب هیدروکربن‌ها به‌صورت متقارن و یکنواخت است و به‌همین خاطر، گشتاور دوقطبی این ترکیب‌ها تقریباً برابر صفر می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۵۳- اگر برای تولید $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۲}$ یون $O^{۲-}(g)$ از بلور آلومینیم اکسید، به ۵۳۰/۴ کیلوژول انرژی لازم باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بلور آلومینیم‌اکسید برحسب کیلوژول بر مول کدام است؟

۱) ۵۳۰۴ ۲) ۱۰۶۰۸ ۳) ۱۵۹۱۲ ۴) ۲۱۲۱۶

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

به انرژی لازم برای فروپاشی شبکهٔ بلوری یک مول جامد یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا، آنتالپی فروپاشی شبکه گفته می‌شود. آنتالپی فروپاشی شبکهٔ جامدهای یونی را در مقیاس کیلوژول بر مول گزارش می‌کنند. هرچه چگالی بار یون‌های سازندهٔ یک ترکیب یونی بیشتر باشد، این یون‌ها با نیروی بیشتری به‌سمت یکدیگر جذب می‌شوند و پایداری و استحکام شبکهٔ بلوری نیز بیشتر می‌شود. بر این اساس، با افزایش چگالی بار یون‌های سازندهٔ ترکیب‌های یونی مختلف، مقدار آنتالپی فروپاشی شبکه این مواد افزایش پیدا می‌کند و فروپاشی شبکهٔ بلوری آن‌ها دشوارتر می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده، معادلهٔ واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$Al_2O_3(s) \rightarrow 2Al^{3+}(g) + 3O^{2-}(g)$$

کافیست انرژی لازم برای تولید ۳ مول یون O^{2-} را در این واکنش حساب کنیم:

$$?\,kJ = 3\,mol\,O^{2-} \times \frac{6/02 \times 10^{23} O^{2-}}{1\,mol\,O^{2-}} \times \frac{5302/4\,kJ}{6/02 \times 10^{22} O^{2-}} = 15912\,kJ$$

بنابراین آنتالپی فروپاشی Al_2O_3 برابر $15912\ kJ.mol^{-1}$ است.

گروه آموزشی ماز

۵۴ **نمونه‌هایی به جرم برابر از فلز کلسیم و بلور منیزیم اکسید در اختیار داریم. اگر تفاوت جرم آنیون‌ها و کاتیون‌های موجود در بلور منیزیم اکسید برابر با ۰/۴ گرم باشد، نمونهٔ فلز کلسیم با چند میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار هیدروکلریک اسید به‌طور کامل واکنش می‌دهد و طی این فرایند، چند میلی‌لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد تولید می‌شود؟**

$(Ca = 40 \text{ و } Mg = 24 \text{ و } O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۰۰ ـ ۵۶۰ ۲) ۲۵۰ ـ ۵۶۰ ۳) ۵۰۰ ـ ۱۱۲۰ ۴) ۲۵۰ ـ ۱۱۲۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

فرمول شیمیایی منیزیم اکسید به‌صورت MgO است. در ساختار بلوری هر مول از این ماده، یک مول یون منیزیم (معادل با ۲۴ گرم یون منیزیم) و یک مول یون اکسید (معادل با ۱۶ گرم یون اکسید) وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت تفاوت جرم آنیون و کاتیون موجود در بلور هر مول منیزیم اکسید برابر با ۸ گرم می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده، جرم نمونهٔ منیزیم اکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,MgO = 0/4\,g \text{ تفاوت جرم یون‌ها} \times \frac{1\,mol\,MgO}{8\,g \text{ تفاوت جرم یون‌ها}} \times \frac{40\,g\,MgO}{1\,mol\,MgO} = 2\,g$$

با توجه به محاسبات بالا، می‌توان گفت جرم نمونهٔ کلسیم نیز برابر با ۲ گرم است. فلز کلسیم بر اساس معادلهٔ زیر با محلول هیدروکلریک اسید وارد واکنش شده و گاز هیدروژن را تولید می‌کند:

$$Ca(s) + 2HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + H_2(g)$$

با توجه به معادلهٔ این واکنش، داریم:

$$?\,mL\,HCl = 2\,g\,Ca \times \frac{1\,mol\,Ca}{40\,g\,Ca} \times \frac{2\,mol\,HCl}{1\,mol\,Ca} \times \frac{1\,L\,HCl}{0/2\,mol\,HCl} \times \frac{1000\,mL\,HCl}{1\,L\,HCl} = 500\,mL$$

$$?\,mL\,H_2 = 2\,g\,Ca \times \frac{1\,mol\,Ca}{40\,g\,Ca} \times \frac{1\,mol\,H_2}{1\,mol\,Ca} \times \frac{22/4\,L\,H_2}{1\,mol\,H_2} \times \frac{1000\,mL\,H_2}{1\,L\,H_2} = 1120\,mL$$

گروه آموزشی ماز

۵۵ **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده درست است؟**

۱) رنگدانه‌های طبیعی، با استفاده از منابعی مثل کانی‌ها به‌دست آمده و عناصر فلزی در ساختار برخی از آن‌ها وجود دارند.

۲) بین عناصر فلزی موجود در تناوب سوم، کاتیون پایدار حاصل از واکنش‌پذیرترین عنصر، بیشترین چگالی بار را دارد.

۳) اگر پرتوهایی با $\lambda = 410nm$ را در یک اتاق تاریک به جسم سفید بتابانیم، آن جسم به رنگ قرمز دیده می‌شود.

۴) با افزایش عدد جرمی هالوژن‌ها، $\Delta H_{\text{فروپاشی}}$ شبکه ترکیب حاصل از این مواد با منیزیم افزایش پیدا می‌کند.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

جزء سازنده اصلی یک ماده رنگی که به آن رنگ می‌بخشد، رنگدانه نام دارد. در واقع، رنگدانه‌های موجود در یک ماده با جذب یا بازتاب برخی از پرتوهای مرئی، سبب ایجاد رنگ‌های مختلف می‌شوند. به‌عنوان مثال، رنگ سبز درختان و رنگ سرخ گل رز به خاطر وجود رنگدانه‌ها است. تیتانیم(IV) اکسید، آهن(III)

www.biomaze.ir

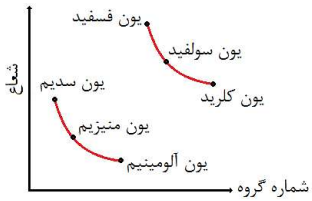
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

اکسید و دوده، از جمله رنگدانه‌های معدنی هستند که به‌ترتیب رنگ‌های سفید، قرمز و سیاه را ایجاد می‌کنند. انسان‌های گذشته این مواد را از منابع طبیعی همچون گیاهان، جانوران و برخی از کانی‌ها تهیه می‌کردند. توجه داریم که در ساختار تیتانیم(IV) اکسید و آهن(III) اکسید، یون‌های حاصل از اتم‌های فلزی یافت می‌شوند اما دوده، نمونه‌ای از کربن بوده و فاقد اتم فلزی است.

امروزه با پیشرفت و گسترش تولید فراورده‌های صنعتی، این فراورده‌ها افزون بر رقابت در جنبه‌های کمی و کیفی، باید از دیدگاه زیباشناختی نیز رنگ و رنگ‌آمیزی جذاب و مناسبی داشته باشند. بر این اساس، امروزه رنگ‌های ساختگی گوناگونی تولید می‌شوند که از آن‌ها در صنایع غذایی، نساجی و ساختمانی استفاده می‌شود. رنگ‌هایی که برای پوشش سطح استفاده می‌شوند (مثل رنگ‌های روغنی)، نوعی کلوئید هستند که لایهٔ نازکی روی سطح ایجاد می‌کنند تا افزون بر زیبایی، از نفوذ رطوبت و اکسیژن به لایه‌های زیرین جلوگیری کرده و مانع خوردگی اجسام در برابر اکسیژن، رطوبت و مواد شیمیایی می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ نمودار مقابل، مقایسهٔ شعاع یونی عناصر موجود در تناوب سوم را نشان می‌دهد:



فلز سدیم، عنصر فلزی از تناوب سوم است که در مقایسه با سایر فلزهای موجود در این تناوب بیشترین واکنش‌پذیری را دارد. با توجه به نمودار داده شده، از میان کاتیون‌های موجود در این نمودار، یون آلومینیم کوچک‌ترین شعاع یونی را دارد؛ درحالی‌که بار الکتریکی آن در مقایسه با سایر کاتیون‌ها بیشتر است؛ پس می‌توان گفت چگالی بار این یون در مقایسه با سایر کاتیون‌های موجود در نمودار بیشتر است. در نقطهٔ مقابل، بین یون‌های موجود در این نمودار، یون کلرید دارای کمترین چگالی بار است.

۳ پرتوهایی با $\lambda = ۴۱۰nm$ به رنگ بنفش دیده می‌شوند. اگر این پرتوها را به یک جسم سفید بتابانیم، همه آن‌ها توسط جسم موردنظر بازتاب می‌شوند و این پرتوها با هم جمع شده و رنگ پرتوی اولیه (بنفش) را ایجاد می‌کنند و به چشم بیننده می‌رسند. بر این اساس، می‌توان گفت اگر پرتوهای بنفش‌رنگ را در یک اتاق تاریک به جسم سفید بتابانیم، آن جسم به رنگ بنفش دیده می‌شود.

۴ با افزایش عدد جرمی و عدد اتمی هالوژن‌ها (عناصر موجود در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای) از بالا به پایین، شعاع یون هالید (آنیون تک اتمی حاصل از هالوژن‌ها) افزایش یافته، چگالی بار این یون کاهش پیدا کرده و در نتیجه، $\Delta H_{\text{فروپاشی}}$ شبکه منیزیم هالید کاهش می‌یابد.

در یک گروه از جدول تناوبی، با حرکت از بالا به پایین، تعداد لایه‌های الکترونی موجود در یون‌ها بیشتر شده و به‌همین خاطر، شعاع یونی عناصر افزایش پیدا می‌کند. به‌عنوان مثال، مقایسه شعاع یونی کاتیون‌های حاصل از عناصر گروه اول به‌صورت $Cs^+ > Rb^+ > K^+ > Na^+ > Li^+$ و مقایسهٔ شعاع یونی آنیون‌های حاصل از عناصر گروه هفدهم (هالوژن‌ها) به‌صورت $I^- > Br^- > Cl^- > F^-$ است. بر این اساس، می‌توان گفت در یک گروه از جدول تناوبی با حرکت از بالا به پایین، شعاع یون‌ها افزایش پیدا می‌کند، درحالی‌که بار الکتریکی آن‌ها ثابت باقی می‌ماند. بر این اساس، در یک گروه از جدول تناوبی با حرکت از بالا به پایین، چگالی بار یون‌ها کاهش پیدا می‌کند.

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

اول: درست؛ با کمک گرفتن از آنتالپی پیوند و یکی از عوامل مؤثر بر آن یعنی طول پیوند می‌توان میزان سختی را در جامدهای کووالانسی مقایسه کرد که هرچه طول پیوند کوتاه‌تر باشد، شکستن آن دشوارتر است.

طول پیوند: $C-C < Si-C < Si-Si$

دوم: درست

سوم: درست

چهارم: نادرست؛ تنوع ترکیب‌های کووالانسی از مواد مولکولی و یونی به مراتب کمتر است.

۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

عدد اتمی تنها نافلز مایع یا برم برابر ۳۵ است. پس مجموع عدد اتمی این چهار عنصر برابر ۷۰ است. یعنی $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=70$،

پس $4n+6=70$ و در نتیجه $n=16$ است، بنابراین عدد اتمی چهار عنصر به‌صورت $_{16}A$ ، $_{17}B$ ، $_{18}C$ ، $_{19}D$ است.

مورد اول: نادرست؛ بیشترین چگالی بار مربوط به A^{2-} است؛ زیرا بار الکتریکی آن از یون‌های پایدار B^- و D^+ بزرگ‌تر است.

مورد دوم: درست؛ هرچه بار آنیون بیشتر و عدد اتمی آن کوچک‌تر باشد، شعاع آنیون بزرگ‌تر می‌شود.

مورد سوم: درست؛ بیشترین قدرت کاهندگی مربوط به فلز قلیایی D است که تمایل زیادی به از دست دادن الکترون دارد.

مورد چهارم: درست؛ فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از واکنش دو عنصر B و D به‌صورت DB یا همان KCl است. برابر بودن نسبت کاتیون و آنیون در ترکیب دلیلی بر یکسان بودن عدد کوئوردیناسیون یون‌ها در شبکه بلور است.

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

عنصر M با عنصر اکسیژن ترکیبی یونی تشکیل می‌دهد (MO) که نقطهٔ ذوب بیشتری از ترکیب عنصر X و اکسیژن (هر دو نافلز و ترکیب آن‌ها ماده مولکولی است) دارد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) آنتالپی فروپاشی شبکه و نقطهٔ ذوب کلرید فلز M (MCl_2) کمتر از ترکیب یونی MX است؛ زیرا چگالی بار آنیون ترکیب MX بیشتر است.

۲) نسبت عدد کوئوردیناسیون کاتیون به عدد کوئوردیناسیون آنیون در ترکیب MX (۱) کوچک‌تر از این نسبت در ترکیب کلسیم‌کلرید ($CaCl_2$ ، ۲) است.

۴) آنتالپی فروپاشی ترکیب Na_2X کوچک‌تر از آنتالپی فروپاشی ترکیب MX است؛ زیرا چگالی بار یون سدیم از چگالی بار یون M^{2+} کوچک‌تر است.

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

براساس توصیف ارائه شده E اتم نیتروژن است که ترکیب آن با H اولاً غیریونی است و ثانیاً خاصیت بازی در آب ایجاد می‌کند، بنابراین می‌توان گفت:

A	X	Y	D	E	M	G
Li	Be	B	C	N	O	F

در بین ترکیبات حاصل از گزینه‌های ۱ تا ۴ فقط ترکیب A با M یونی است و سایر ترکیبات مولکولی هستند که به مراتب آنتالپی فروپاشی کمتری نسبت به ترکیب حاصل از A با M دارند.

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

چنانچه در این ساختار کلیهٔ اتم‌ها را به آرایش گاز نجیب برسانیم مجموع الکترون‌های ظرفیتی برابر ۸۴ خواهد بود و با توجه به مجموع الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی اتم‌ها پس از تشکیل پیوندها که برابر ۸۴ است، بار q برابر صفر است.

$q =$ (مجموع الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی) − مجموع الکترون‌های ظرفیتی